

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА



Я. Б. ФОРКУН, М. Л. ГЛІБОВА, Н. О. САБАЛАЄВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з курсу

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ
(ЧАСТИНА І)

(для студентів усіх форм навчання напрямів
6.050701 – Електротехніка та електротехнології,
6.050702 – Електромеханіка)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2015

Форкун Я. Б. Конспект лекцій з курсу «Теоретичні основи електротехніки», частина I (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 – Електротехніка та електротехнології, 6.050702 – Електромеханіка) / Я. Б. Форкун., М. Л. Глебова, Н. О. Сабалаєва; Харків нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 79 с.

Автори: Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова, Н. О. Сабалаєва

Рецензент: д.т.н., проф. А. Г. Сосков

Рекомендовано кафедрою теоретичної та загальної електротехніки,
протокол засідання № 10 від 16 червня 2015 р.

© Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова,
Н. О. Сабалаєва, 2015
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015

Зміст

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	8
1.1 Електричне коло, електрична схема та їх елементи.....	8
1.2 Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на..... джерело струму (і навпаки).....	10
1.3 Основні поняття, що характеризують електричні схеми. Лінійні й нелінійні електричні кола, розгалужені й нерозгалужені.....	11
1.4 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола.....	12
1.5 Закони Кірхгофа.....	12
1.6 Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму.....	13
1.7 Потенціальна діаграма.....	14
1.8 Метод контурних струмів.....	15
1.9 Метод вузлових потенціалів.....	17
1.10 Заміна кількох паралельних віток, що містять ЕРС та опори, однією еквівалентною вітою.....	19
1.11 Основні властивості електричних кіл постійного струму.....	19
1.11.1 Поняття входних і взаємних провідностей.....	19
1.11.2 Принцип взаємності.....	20
1.11.3 Теорема компенсації.....	21
1.11.4 Принцип накладання і метод накладання.....	21
1.11.5 Принцип лінійності.....	22
1.12 Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник опорів (і навпаки).....	23
1.13 Двополюсник. Теорема про еквівалентний генератор метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці.....	25
1.14 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження.....	27
1.15 Передача енергії по лініям передачі.....	28
РОЗДІЛ 2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.....	30
2.1 Основні величини, що характеризують синусоїдний струм	30
2.2 Синусоїдний струм активного опору.....	31
2.3 Синусоїдний струм індуктивності.....	32
2.4 Синусоїдний струм ємності.....	33
2.5 Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму	33
2.6 Потужність в колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна)..<	35

2.7 Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл.....	36
2.8 Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами.....	37
2.9 Символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму.....	39
2.10 Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі.....	39
2.11 Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола.....	40
2.12 Комплексна форма запису потужності. Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму.....	41
2.13 Векторні й топографічні діаграми.....	42
2.14 Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження.....	43
2.15 Резонанс у послідовному коливальному контурі.....	44
2.16 Резонанс у паралельному коливальному контурі.....	46
2.17 Складний резонансний коливальний контур.....	48
2.18 Практичне застосування резонансу.....	48
2.19 Поняття падіння і втрати напруги в лініях передачі енергії.....	49
РОЗДІЛ 3 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ.....	50
3.1 Основні поняття і класифікація.....	50
3.2 Основні рівняння чотириполюсника.....	51
3.3 Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника	53
3.3.1 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника розрахунком.....	53
3.3.2 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника експериментальним шляхом.....	55
3.4 Схеми заміщення пасивного чотириполюсника.....	56
3.5 Годографи (кругові й лінійні діаграми).....	57
3.5.1 Лінійні діаграми.....	58
3.5.2 Кругові діаграми.....	59
3.5.3 Кругова діаграма струму для двох послідовно з'єднаних опорів.....	60
РОЗДІЛ 4 ТРИФАЗНІ КОЛА.....	61
4.1 Основні поняття і визначення.....	61
4.2 Основні схеми з'єднання трифазних кіл. Визначення лінійних і фазних величин.....	62
4.2.1 З'єднання обмоток генератора зіркою.....	62
4.2.2 З'єднання обмоток генератора трикутником.....	63

4.2.3 З'єднання обмоток генератора та трифазного навантаження за типом "зірка-зірка".....	64
4.2.4 З'єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом "трикутник-трикутник", "зірка-трикутник".....	65
4.3 Розрахунок трифазних кіл.....	65
4.3.1 Коло "зірка-зірка" з нульовим проводом.....	66
4.3.2 Коло "зірка-зірка" без нульового проводу.....	67
4.3.3 Кола "трикутник-трикутник" і "зірка-трикутник".....	67
4.4 Аварійні режими в трифазних колах.....	70
4.4.1 Схема "зірка-зірка".....	70
4.4.2 Схема "зірка-трикутник".....	71
4.5 Потужність трифазного кола.....	72
РОЗДІЛ 5 КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ.....	74
5.1 Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності	74
5.2 Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок.....	75
5.3 Визначення взаємної індуктивності	76
5.4 Паралельне з'єднання зустрічно включених котушок.....	77
СПИСОК ДЖЕРЕЛ.....	78

Вступ

Електротехнікою називається широка область практичного застосування електромагнітних явищ. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) – дисципліна, що займається питаннями розрахунку та вивчення явищ, які характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукцією магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для вивчення усіх електротехнічних дисциплін, що передбачені навчальними планами напрямів підготовки 6.050701 – Електротехніка та електротехнології, 6.050702 – Електромеханіка.

Студенти спеціальностей «Електротехнічні системи електроспоживання» (ЕСЕ), «Світлотехніка та джерела світла» (СДС), «Електричні системи і комплекси транспортних засобів» (СТ), «Електричний транспорт» (ЕТ), «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» (СА) всіх форм навчання протягом двох семестрів вивчають відповідно першу та другу частини дисципліни «Теоретичні основи електротехніки». Студенти спеціальності ЕСЕ окрім того вивчають протягом третього семестру основи теорії електромагнітного поля (третья частина).

Цей текст лекцій охоплює матеріал першої частини дисципліни ТОЕ, тобто теорію лінійних електричних кіл постійного струму і однофазного синусоїдального струму, та підготовлений на основі робочих програм дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» підготовки бакалавра галузі 0507 – Електротехніка та електромеханіка. Теорія трифазних лінійних електричних кіл синусоїдального струму за існуючими освітньо-професійними програмами для напряму підготовки «Електротехніка та електромеханіка» розглядається в другій частині дисципліни, але ми вважаємо за потрібне цей розділ включити в цей текст лекцій, зважаючи на те, що все ж таки трифазні кола – це різновид електричних кіл синусоїдального струму, до того ж ця тема раніш завжди розглядалася в першій частині дисципліни.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Завдання дисципліни:

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл та співвідношенням між електричними величинами в електричних та магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;

- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного і несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії і методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії і методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами;
- ознайомити з основними законами і методами розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму.

Для студентів спеціальності «Електротехнічні системи електроспоживання» завданням дисципліни також є:

- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл з розподіленими параметрами;
- ознайомити з основами теорії електромагнітного поля, у якій розглядаються електромагнітні явища у нерухомих ізотропних середовищах.

Предметом вивчення дисципліни є основні закони теорії електричних кіл, теорії електромагнітного поля та оволодіння навичками їх практичного застосування для дослідження і розрахунків сучасних електротехнічних пристроїв.

Вивчення курсу «Теоретичні основи електротехніки» потребує знання курсів фізики, а саме розділу «Електрика та магнетизм», і особливо математики, передусім розділів: системи лінійних алгебраїчних рівнянь, теорія матриць, похідна і інтеграл, диференціальні рівняння, функціональні ряди, інтегральні перетворення Лапласа, векторна алгебра.

Розділ 1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Електричне коло, електрична схема та їх елементи

Електричне коло – сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу і взаємного перетворення електромагнітної та інших видів енергії, по яким може протікати електричний струм. Електромагнітні процеси в електричному колі описують за допомогою понять «струм», «напруга», «електрорушійна сила (ЕРС)», «опір» («провідність»), «індуктивність», «ємність».

Основні елементи електричного кола:

- джерела електричної енергії – пристрої, що перетворюють механічну, теплову, хімічну та інші види енергії в електромагнітну (генератор, акумуляторна батарея та ін.);
- перетворювачі електромагнітної енергії (трансформатори, перетворювачі частоти та ін.);
- пристрої передачі електромагнітної енергії (лінії передачі);
- споживачі електромагнітної енергії, що перетворюють електромагнітну енергію в механічну, теплову, хімічну та інші види (двигуни, лампи розжарювання, резистори та ін.).

Кожна група – це безліч різних приладів, що відрізняються за принципом дії, конструкцією тощо.

Кола, в яких процеси отримання електричної енергії в джерелах, передача та перетворення в споживачах відбуваються при незмінних у часі струмах та напругах, називають *колами постійного струму*.

У курсі ТОЕ електричне коло замінюють моделлю (графічним зображенням) – *електричною схемою*. Електричні схеми будують з ідеалізованих елементів – активних та пасивних, кожний з яких відображає одну з сторін фізичних явищ в реальних електричних колах.

До пасивних елементів (аналог споживачів електромагнітної енергії) відносять (рис. 1.1 – умовні позначення опору, ємності та індуктивності):

- опір, $[Ом]$ – ідеалізований елемент, що приблизно замінює резистор, в якому відбувається перетворення електричної енергії в теплову;
- ємність, $[Ф]$ – ідеалізований елемент, який приблизно замінює конденсатор, в якому накопичується енергія електричного поля;
- індуктивність $[Гн]$ – ідеалізований елемент, який приблизно замінює котушку індуктивності, в якій може накопичуватися енергія магнітного поля.

До активних елементів (аналог джерел електромагнітної енергії) відносять джерела електрорушійної сили та джерела струму (рис. 1.2).

У джерелах ЕРС $e(t)$ і джерелах струму $j(t)$ під дією сторонніх сил неелектричної природи виникає поділ зарядів, що призводить до появи напруги на затискачах джерела ЕРС або струму на ділянці з джерелом струму. Активні елементи враховують процеси перетворення неелектричних видів енергії в електромагнітну.

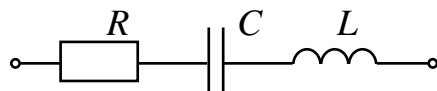


Рисунок 1.1

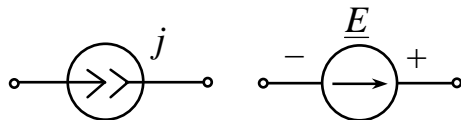


Рисунок 1.2

При складанні схеми заміщення в неї вводять ті ідеалізовані схемні елементи, за допомогою яких характеризують основні процеси в реальних елементах кола, а відносно другорядними процесами для розглянутої смуги частот і амплітуд впливів, зазвичай нехтують.

Так, резистор для низьких частот можна представити одним резистивним елементом, але для високих – той же резистор повинен бути представлений іншою схемою (рис. 1.3,а): у ній мала (паразитна) індуктивність L_n враховує зчеплений з резистором магнітний потік, а мала паразитна ємність C_n , враховує протікання струму зміщення між затискачами резистора.

Конденсатор на низьких частотах заміщують одним ємнісним елементом, а на високих частотах конденсатор представляють схемою (рис. 1.3,б). У цій схемі резистор R_n враховує втрати у неідеальному діелектрику конденсатора, а L_n – паразитна індуктивність підвідних контактів.

Індуктивну котушку більш повно представляють схемою (рис. 1.3,в). У ній R_n враховує теплові втрати в обмотці і в осерді, а паразитна ємність C_n – струми між витками котушки.

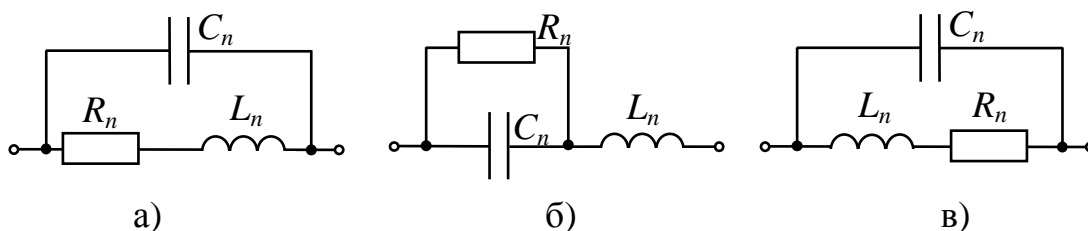


Рисунок 1.3

Якщо напруга і струм на всіх елементах реальної кола не залежать від просторових координат, то таке коло називають колом із зосередженими параметрами та описують алгебраїчними або звичайними диференціальними рівняннями. Процеси в колах з розподіленими параметрами описують рівняннями в часткових похідних.

Відповідність електричної схеми та кола перевіряють шляхом зіставлення розрахунку із експериментом.

1.2. Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки)

Джерела енергії є причиною виникнення струмів і напруг в електричних колах. Для аналізу електричних кіл використовують поняття ідеалізованих джерел напруги та струму.

Під ідеалізованим *джерелом напруги* розуміють таке джерело, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через нього і яке характеризують тільки електрорушійною силою E (рис. 1.4,а). Якщо джерело напруги не ідеалізоване, то воно має внутрішній опір R_0 і напруга на його затискачах залежить від величини струму, що протікає через нього (рис. 1.4,б; де m_U, m_I – масштаби по напрузі та струму вольт-амперної характеристики джерела).

Під ідеалізованим *джерелом струму* розуміють таке джерело енергії, сила струму якого j не залежить від навантаження, до якого це джерело під'єднане (внутрішній опір такого джерела $R_0 \rightarrow \infty$). Умовне позначення ідеалізованого джерела струму та його вольт-амперна характеристика (ВАХ) представлені на рисунку 1.5.

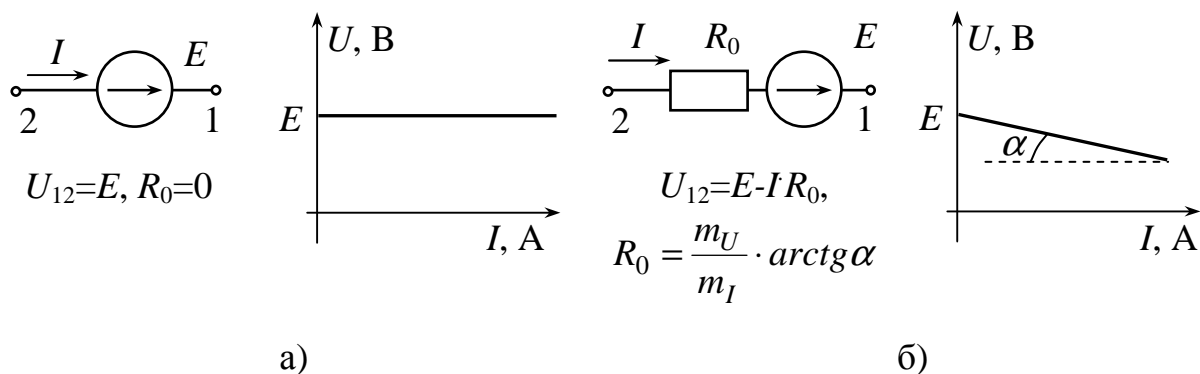


Рисунок 1.4.

Фізично виконати ідеалізовані джерела струму та напруги неможливо.

При розрахунку електричних кіл реальне джерело напруги з ЕРС E_0 та внутрішнім опором R_0 , що з'єднане з навантаженням, може бути представлено двома способами (рис. 1.6,а і рис. 1.6,б). Ці схеми еквівалентні щодо потужності, яка споживається навантаженням, і нееквівалентні щодо потужності, яка споживається внутрішнім опором R_0 . Для схеми рисунку. 1.6,а:

$$E = U_H + I_H \cdot R_0; \quad (1.1)$$

$$\frac{E}{R_0} = \frac{U_H}{R_0} + I_H. \quad (1.2)$$

$$\text{Позначимо: } \frac{E}{R_0} = j \text{ і } \frac{U_H}{R_0} = I_0. \quad (1.3)$$

$$\text{З урахуванням (1.3): } j = I_0 + I_H, \quad (1.4)$$

Цьому рівнянню відповідає схема рисунку 1.6, б, а формули (1.5) застосовують для переходу від реального джерела напруги до реального джерела струму (і навпаки):

$$\frac{E}{R_0} = j, \quad E = j \cdot R_0. \quad (1.5)$$

У відношенні енергії, що споживається внутрішнім опором R_0 , ці схеми нееквівалентні, тобто для рисунку 1.6,а - $P_0 = I_H^2 \cdot R_0$, а для рисунку 1.6,б - $P_0 = I_0^2 \cdot R_0$. Потужність, що споживається опором навантаження R_H , для обох схем однакова:

$$P_H = I_H^2 \cdot R_H. \quad (1.6)$$

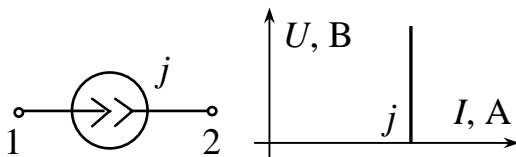
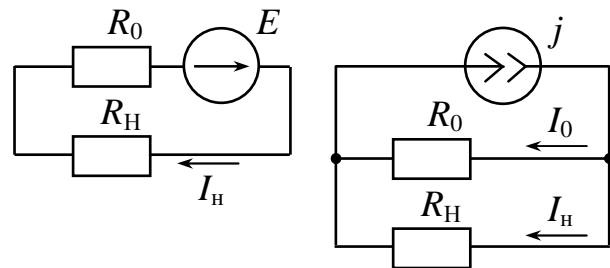


Рисунок 1.5



а)

б)

Рисунок 1.6

1.3 Основні поняття, що характеризують електричні схеми. Лінійні й нелінійні електричні кола, розгалужені й нерозгалужені

Лінійні електричні кола – кола, всі елементи яких лінійні (резистор, ємність, індуктивність), тобто мають лінійні вольт-амперні характеристики. Якщо коло має хоча б один нелінійний елемент (діод, стабілітрон, лампа розжарювання та ін.) – то воно *нелінійне*.

Основними поняттями, що характеризують електричні схеми є *вітка*, *вузол*, *контур*.

Вітка – ділянка кола, вздовж якої протікає один і той же струм; утворюється вітка кількома послідовно з'єднаними елементами

Вузол – точка на схемі, де з'єднуються три і більше вітки. *Вітки*, приєднані до одних і тих самих вузлів, називаються паралельними.

Контур – будь-який замкнутий шлях, що проходить по декількох вітках.

Розгалуженим колом зветься коло, що має три і більше вітки, два і більше вузлів. *Нерозгалуженим* колом називається коло, що має тільки один контур (не має вузлів).

1.4 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола

Напруга на ділянці кола – це різниця потенціалів точок (φ) між крайніми точками цієї ділянки. За визначенням: $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$. (1.7)

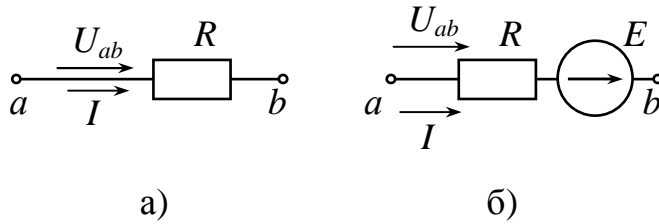


Рисунок 1.7

При протіканні через опір R струму I $\varphi_a > \varphi_b$ на величину падіння напруги в опорі R , тобто $\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R$, (1.8)

$$\text{або } U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R \quad (1.9)$$

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що не має у своєму

складі ЕРС (рис. 1.7,а):

$$I = \frac{U_{ab}}{R}. \quad (1.10)$$

Розглянемо ділянку кола, що має у своєму складі ЕРС (рис. 1.7,б). Для цього кола справедливими будуть вирази:

$$\left. \begin{aligned} U_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b \\ \varphi_a &= \varphi_c + I \cdot R \\ \varphi_c &= \varphi_b - E \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_a - \varphi_b = \varphi_c + I \cdot R - \varphi_c - E \Rightarrow U_{ab} = I \cdot R - E. \quad (1.11)$$

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що має у своєму складі ЕРС (рис. 1.5,б) має вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R}. \quad (1.12)$$

Якщо ділянка кола має у своєму складі кілька ЕРС, спрямованих у різні сторони, а також кілька опорів, то закон Ома матиме вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} \pm E_i}{\sum R_i}. \quad (1.13)$$

Примітка: коли напрямки ЕРС E_i і напруги U_{ab} збігаються з напрямком струму I в ділянці « ab », то в чисельнику беремо E_i і напругу U_{ab} зі знаками "+", і навпаки.

1.5 Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду: алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі, в будь який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (1.14)$$

де k – номери віток, які зв'язані з даним вузлом.

Якщо струм спрямований до вузла, то він входить у рівняння (1.14) зі знаком "+", спрямований від вузла – зі знаком "-".

Другий закон Кірхгофа виражає закон збереження енергії: алгебраїчна сума напруг ділянок замкнутого контуру дорівнює нулю в будь-який момент часу:

$$\sum_{i=1}^m U_i = 0, \quad (1.15)$$

де i – номер ділянки, що входить у контур.

Частіше використовують інше формулювання другого закону Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг уздовж контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС вздовж цього ж контуру (знаки ЕРС або падінь напруг залежать від їх напрямків і обраних напрямків обходу контурів).

За першим законом Кірхгофа для схеми треба складати « $n-1$ » рівнянь, де n – кількість вузлів у схемі).

За другим законом Кірхгофа треба складати « $m-n+1$ » рівнянь, де m – кількість віток у схемі з невідомими струмами (якщо вітка містить джерело струму, то струм цієї вітки відомий). Отже, система рівнянь за законами Кірхгофа повинна мати стільки рівнянь, скільки невідомих струмів (віток).

Розглянемо приклад складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для схеми (рис. 1.8):

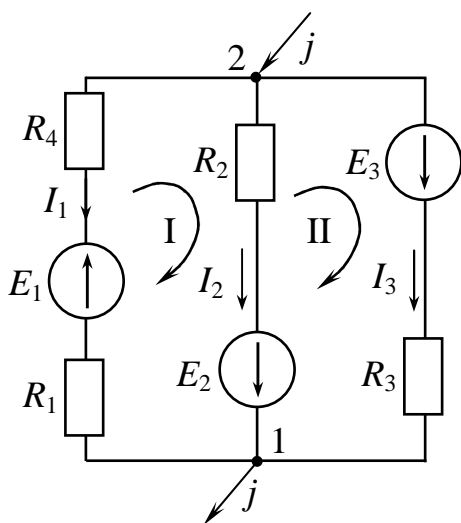


Рисунок 1.8

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 + j = 0 \\ I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = E_2 - E_1 - E_3 \\ -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot (R_3 + R_4) = E_3. \end{cases} \quad (1.16)$$

Порядок розрахунку струмів схеми за законами Кірхгофа.

1. Визначаємо кількість вузлів і віток у схемі, а отже кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа.

2. Довільно вибираємо напрямки струмів у вітках і напрямки обходу контурів.

3. Складаємо і вирішуємо систему відносно невідомих струмів.

1.6 Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму

На підставі закону збереження енергії: кількість тепла, що виділяється в опорах схеми, повинна дорівнювати енергії, яка постачається за той же самий

час джерелами енергії, тобто потужність джерел енергії (напруги і струму) дорівнює потужності, що споживається опорами схеми:

$$\sum_{i=1}^k (\pm E_i \cdot I_i) + \sum_{i=1}^p j_i \cdot U_{ab} = \sum_{i=1}^l I_i^2 \cdot R_i, \quad (1.17)$$

де k – кількість ЕРС у схемі;

p – кількість джерел струму у схемі;

l – кількість опорів у схемі;

U_{ab} – напруга між умовною точкою «а», куди спрямований струм джерела струму j_i , та умовною точкою «б», звідки струм цього джерела струму витікає.

Правило складання балансу: якщо напрямок джерела ЕРС E_i і напрямок струму I_i , що протікає через нього, збігаються, то доданок $E_i \cdot I_i$ беремо зі знаком "+", навпаки – зі знаком "-".

Приклад складання балансу для схеми рисунок 1.8:

$$-E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + j \cdot U_{21} = I_1^2 \cdot (R_1 + R_4) + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3. \quad (1.18)$$

1.7 Потенціальна діаграма

Потенціальна діаграма – це графік розподілу потенціалу вздовж замкнутого контуру або ділянки кола. По осі абсцис відкладають опори вздовж контуру, один за одним, починаючи від довільно обраної точки, потенціал якої приймають рівним нулю. На осі ординат відкладають потенціали точок контуру.

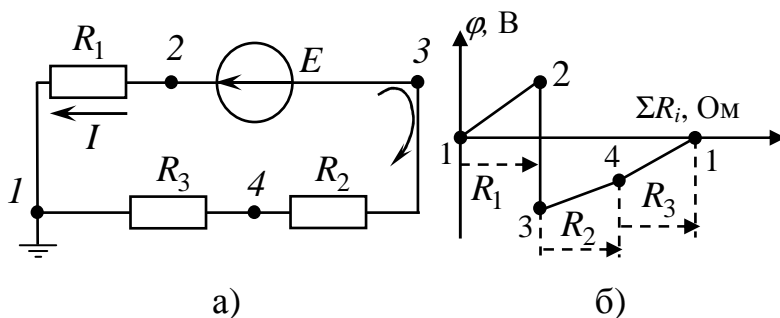


Рисунок 1.9

Приклад побудови діаграми (рис. 1.9, а):

1. Визначаємо струми на ділянках кола (в нашому випадку – це один струм, бо схема нерозгалужена):

$$I = E / (R_1 + R_2 + R_3).$$

2. Один з потенціалів контуру приймаємо рівним нулю – $\varphi_1 = 0$.

3. Визначаємо потенціали інших точок (потенціал останньої, вона ж перша, точки повинен бути рівним нулю) – $\varphi_2 = \varphi_1 + I \cdot R_1$; $\varphi_3 = \varphi_2 - E$, $\varphi_4 = \varphi_3 + I \cdot R_2$, $\varphi_1 = \varphi_4 + I \cdot R_3$.

4. Обираємо масштаби за віссю потенціалів та опорів та будуємо діаграму – рисунок 1.9,б.

1.8 Метод контурних струмів

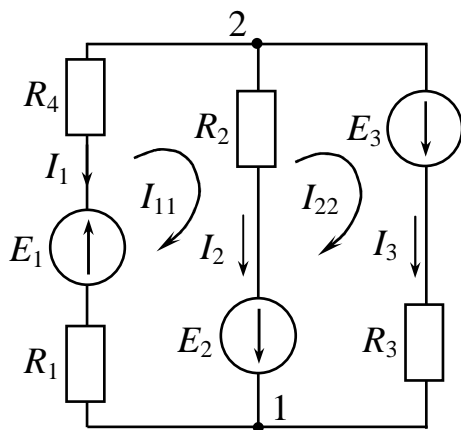


Рисунок 1.10

Метод застосовують для розрахунку електричних кіл будь-якої складності. Він дозволяє зменшити кількість рівнянь, що треба було б скласти за законами Кірхгофа, а саме з кількості « m » до кількості « $m-n+1$ » де n – кількість вузлів, а m – кількість віток у схемі.

Відповідно до цього методу роблять припущення, що в кожному *незалежному* контурі існує свій *контурний* струм (*незалежний* контур – це контур, що містить хоча б одну вітку, яка не входить в інші контури).

Кількість рівнянь, що треба скласти за методом, дорівнює кількості незалежних контурів, або числу рівнянь за другим законом Кірхгофа. Струми віток визначають за допомогою контурних струмів.

Потрібно мати на увазі, що контурний струм – це зручне, але умовне розрахункове поняття, фізично існують лише струми віток.

Розглянемо схему рисунку 1.10, у якій довільно задамося напрямками струмів у вітках I_1 , I_2 , I_3 і напрямками контурних струмів I_{11} , I_{22} (за годинниковою стрілкою). Складаємо систему за другим законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_1 + I_{11} \cdot R_4 + I_{11} \cdot R_2 - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ I_{22} \cdot R_3 + I_{22} \cdot R_2 - I_{11} \cdot R_2 = E_3 - E_2, \end{cases} \quad \text{або} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_4 + R_2) - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3) = E_3 - E_2. \end{cases} \quad (1.20)$$

Позначимо:

$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2$ – власний опір першого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать контуру;

$R_{22} = R_2 + R_3$ – власний опір другого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать контуру;

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ – взаємний опір першого та другого контурів, дорівнює опорі, що належить обом контурам, в даному випадку – зі знаком "-";

$E_{11} = E_1 + E_2$; $E_{22} = E_3 - E_2$ – власні ЕРС першого та другого контурів, які дорівнюють алгебраїчній сумі усіх ЕРС, які належать першому та другому контурам відповідно (знак "+" перед ЕРС E_i означає, що напрямок цієї ЕРС збігається з обраним напрямком відповідного контурного струму).

Примітка: при користуванні цим методом контурні струми зручно направляти однаково (наприклад, за годинниковою стрілкою); тоді опори з однаковими індексами (R_{11}, R_{22} та т. д.) – додатні, а з різними (R_{12}, R_{23} та т. д.) – від'ємні.

Відповідно до позначень система (1.21) набуває вигляду:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} - I_{22} \cdot R_{12} = E_{11} \\ -I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} = E_{22}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Після того, як з системи знаходять значення контурних струмів (в даному випадку – I_{11}, I_{22}), визначають значення струмів віток:

$$I_1 = -I_{11}; \quad I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_3 = I_{22}. \quad (1.22)$$

Якщо в колі є джерело струму, ввімкнене в деяку вітку, один з контурних струмів стає відомим (дорівнює струму джерела струму з відповідним знаком) і тоді кількість рівнянь скорочується на одиницю.

Порядок розрахунку за методом контурних струмів

1. Довільно обираємо напрямки струмів в вітках кола.
 2. Визначаємо кількість рівнянь в системі за методом (кількість незалежних контурів).
 3. Обираємо напрямки контурних струмів в незалежних контурах.
 4. Складаємо систему рівнянь за методом, що містить « $m-n+1$ » рівнянь.
- Якщо схема має три незалежних контурів, то система містить три рівняння:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22} \\ I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33}. \end{cases} \quad (1.23)$$

5. Визначаємо власні, взаємні опори незалежних контурів та їх власні ЕРС.

6. Розв'язуємо систему рівнянь. Так, наприклад для системи (1.24) загальне рішення має вигляд:

$$\begin{aligned} I_{11} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{13}}{\Delta}, \\ I_{22} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{23}}{\Delta}, \\ I_{33} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{33}}{\Delta}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - \text{головний визначник системи} \quad (1.25);$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - \text{алгебраїчне доповнення, що отримують з го-}$$

ловного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і першого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+1}$;

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - \text{алгебраїчне доповнення, що отримують з го-}$$

ловного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і другого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+2}$ і т. ін.

1.9 Метод вузлових потенціалів

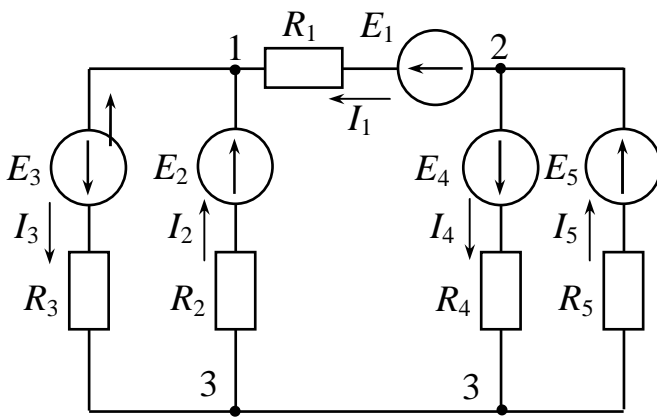


Рисунок 1.11

Це метод розрахунку електричних кіл, відповідно до якого за невідомі приймають потенціали вузлів, після визначення яких можна знайти струм будь-якої вітки за законом Ома. Врахуємо, що завжди можна один з вузлів схеми «заземлити» (потенціал його дорівнює нулю), тому система рівнянь для визначення інших невідомих потенціалів вузлів повинна мати « $n-1$ » рівнянь. В основі

методу – закон Ома та перший закон Кірхгофа. Розглянемо схему рисунку 1.11, в якій «заземлюємо» вузол 3: $\varphi_3 = 0$.

За першим законом Кірхгофа для вузла 1 та за законом Ома для віток 1, 2, 3:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (1.26); \quad I_1 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_1) \cdot G_1, \quad (1.27)$$

$$I_2 = (-\varphi_1 + E_2) \cdot G_2, \quad (1.28); \quad I_3 = (\varphi_1 + E_3) \cdot G_3, \quad (1.29)$$

де $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_3 = \frac{1}{R_3}$ – провідності віток.

Підставимо (1.27), (1.28), (1.29) у (1.26). Отримуємо:

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_2 \cdot G_1 = E_2 \cdot G_2 + E_1 \cdot G_1 - E_3 \cdot G_3. \quad (1.30)$$

Якщо скористатися аналогічними міркуваннями для вузла 2, то

$$-\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot (G_1 + G_3 + G_4) = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5. \quad (1.31)$$

Позначимо:

- $G_{11} = G_1 + G_2 + G_3$ – власна провідність вузла 1, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 1;

- $G_{22} = G_1 + G_4 + G_5$ – власна провідність вузла 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 2;
- $G_{12} = G_{21} = 1/R_1$ – взаємна провідність вузлів 1 і 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що безпосередньо поєднують ці вузли;
- $I_{11} = E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 - E_3 \cdot G_3$, $I_{22} = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5$; – вузлові струми відповідно першого та другого вузлів.

Добуток « $E_i \cdot G_i$ » беремо зі знаком "+", якщо ЕРС E_i спрямована до вузла, відносно якого визначається вузловий струм.

З урахуванням введених коефіцієнтів (1.30) і (1.31) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} = I_{11} \\ -\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} = I_{22} \end{cases} \quad (1.32)$$

Після визначення із системи (1.32) потенціалів вузлів φ_1 та φ_2 знаходимо струми за рівняннями (1.27) ÷ (1.29), а також за рівняннями (1.33) ÷ (1.34):

$$I_4 = (\varphi_2 + E_4) \cdot G_4, \quad (1.33)$$

$$I_5 = (-\varphi_2 + E_5) \cdot G_5. \quad (1.34)$$

Деякі особливості застосування методу.

Припустимо, що в схемі рисунок 1.12 у вітці, де тече струм I_5 , немає опору R_5 ($R_5=0$). Тоді $\varphi_2 = E_5$ і достатньо тільки одного рівняння з системи (1.32) – першого, звідки визначаємо значення потенціалу $\varphi_1 = E_5$, а за рівняннями

Коли у схемі два вузли – також потрібне лише одне рівняння для визначення потенціалу одного з вузлів. Так, для схеми рисунку 1.8, якщо $\varphi_2 = 0$:

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) = -E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3. \quad (1.35)$$

Враховуючи, що $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1$, отримуємо вираз для напруги між вузлами 1 і 2: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}$. (1.36)

Останнє рівняння є основою *методу двох вузлів*, що застосовується для знаходження струмів у схемах, подібних розглянутій (після визначення напруги між двома вузлами струми віток визначають за законом Ома)

Порядок розрахунку за методом вузлових потенціалів

1. Довільно обираємо напрямки струмів в вітках кола.
2. Складаємо систему рівнянь за методом, що містить « $n-1$ » рівнянь. Потенціал одного з вузлів «заземлюємо»
3. Визначаємо власні і взаємні провідності вузлів та вузлові струми.
4. Вирішуємо систему, тобто визначаємо потенціали вузлів кола.
5. За законом Ома визначаємо струми віток.

1.10 Заміна кількох паралельних віток, що містять ЕРС та опори, однією еквівалентною віткою

Припустимо, що ділянки схем рисунку 1.12,а і рисунку 1.12,б еквівалентні щодо струму I і потенціалів вузлів a , b . Тоді рівняння для $G_{екв}$ і $E_{екв}$ (отримують за законами Кірхгофа для вузла «а» і за законом Ома для ділянок кола) мають вигляд:

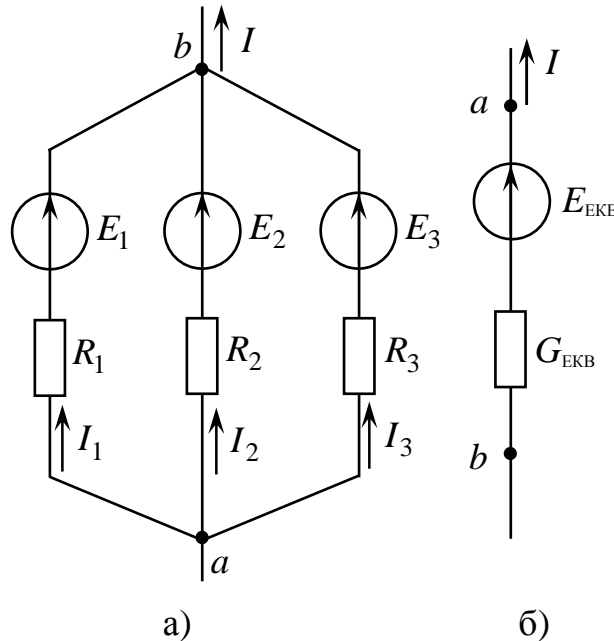


Рисунок 1.12

$$E_{екв} = \frac{E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}; \quad (1.37)$$

$$G_{екв} = G_1 + G_2 + G_3. \quad (1.38)$$

Якщо деяка ЕРС E_i спрямована у протилежну сторону, ніж $E_{екв}$, то у чисельнику правої частини рівняння (1.37) добуток « $E_i \cdot G_i$ » беремо зі знаком «-».

Примітка: якщо між вузлами «а» і «b» також ввімкнене джерело струму j , то у чисельник правої частини рівняння (1.37) додаємо « $+j$ » (якщо струм джерела струму j спрямований до вузла «а»), або « $-j$ » (якщо навпаки).

1.11 Основні властивості електричних кіл постійного струму

1.11.1 Поняття входних і взаємних провідностей

Вхідна провідність – відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС цієї ж вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nn}).

Взаємна провідність – відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС іншої вітки (вітка має номер m) за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nm}). Визначають входні та взаємні провідності розрахунковим і експериментальним шляхом. З поняттям вхідної провідності пов'язане поняття

вхідного опору (відношення ЕРС однієї вітки до струму цієї ж вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках). Так вхідний опір вітки n :

$$R_{\text{вх}nn} = \frac{E_n}{I_n} = \frac{1}{G_{nn}}. \quad (1.39)$$

Знайдемо деякі вхідні і взаємні провідності для схеми рисунку 1.13.

Вихідні дані: $R_1=1$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=4$ Ом, $E_1=70$ В, $E_2=30$ В, $E_3=30$ В.

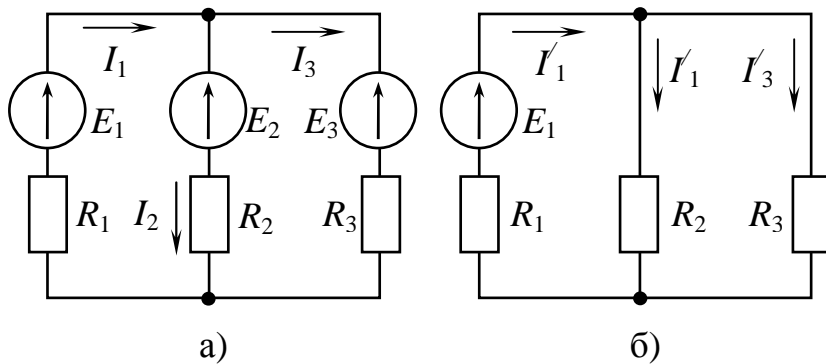


Рисунок.1.13

Визначити провідності G_{11} , G_{21} , G_{31} .

Закорочуємо ЕРС E_2 , E_3 (рис. 1.13,б).

Визначаємо струми віток.

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = 30 \text{ А};$$

$$I'_2 = 20 \text{ А}; \quad I'_3 = 10 \text{ А}.$$

Тоді $G_{11} = \frac{I'_1}{E_1} = \frac{30}{70} = 0,4285 \text{ См}; \quad G_{21} = \frac{I'_2}{E_1} = \frac{20}{70} = 0,2857 \text{ См};$

$$G_{31} = \frac{I'_{31}}{E_1} = \frac{10}{70} = 0,1428 \text{ См}.$$

Проробивши аналогічні дії для визначення G_{22} , G_{32} , G_{12} , G_{21} , G_{31} , G_{13} неважко переконатися, що $G_{12} = G_{21}$, $G_{31} = G_{13}$, $G_{23} = G_{32}$.

1.11.2 Принцип взаємності

Для будь-якого лінійного кола струм I_k в k -й вітці, який викликаний ЕРС E_m , що знаходиться в m -й вітці, буде дорівнювати струму I_m в m -й вітці, що викликаний ЕРС E_k , яка знаходиться в k -й вітці за умови, що $E_k=E_m$ чисельно. Принцип доводиться з рівності $G_{mk} = G_{km}$ і $E_k=E_m$. Тобто: $I_m = E_k \cdot G_{mk}$,

$$I_k = E_m \cdot G_{km}, \quad \text{а отже} \quad I_k = I_m \quad (\text{враховуючи, що } E_m=E_k).$$

Розглянемо на прикладі схеми рисунок 1.14 доказ принципу взаємності.

Джерело ЕРС E знаходиться в першій вітці (схема рис. 1.14,а) $\Rightarrow I_3 = E \cdot G_{31}$.

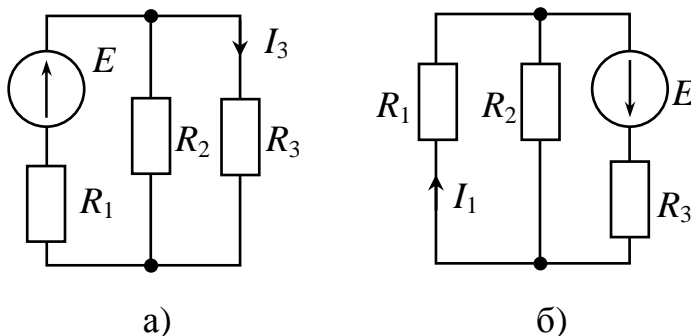


Рисунок 1.14

$$I_3 = \frac{E}{\left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \right)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} = E \cdot G_{31}.$$

Джерело ЕРС E знаходиться в третій вітці (схема рис. 1.15, б) $\Rightarrow I_1 = E \cdot G_{13}$.

$$I_1 = \frac{E}{R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E \cdot R_2}{R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2} = E \cdot G_{13}.$$

Оскільки $G_{13} = G_{31} \Rightarrow I_3 = I_1$.

1.11.3 Теорема компенсації

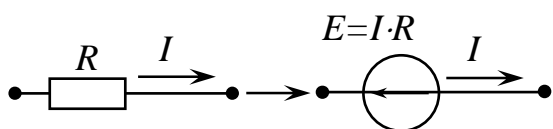


Рисунок 1.15

У будь-якому електричному колі без зміни розподілу струмів в ньому опір зі струмом, що протікає в ньому, може бути замінений на ЕРС, що дорівнює падінню напруги в опорі ($E = I \cdot R$) і яка спрямована назустріч струму в цьому опорі – дивись рисунок 1.15.

1.11.4 Принцип накладання і метод накладання

Принцип накладання: струм у будь-якій вітці лінійного електричного кола буде дорівнювати алгебраїчній сумі так званих часткових струмів, що викликані кожною з ЕРС окремо. Впливає принцип з лінійності рівнянь, що отримані на основі законів Кірхгофа для електричних кіл з постійними параметрами.

Наприклад, для схеми на рисунку 1.13,а струм I_1 : $I_1 = I_1' - I_1'' - I_1'''$, (1.40)

де I_1' – частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_1 ;

I_1'' – частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_2 ;

I_1''' – частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_3 .

Примітка: на кожному етапі інші ЕРС треба закорочувати.

З принципу накладання впливає метод накладання.

Порядок розрахунку за методом накладання

(на прикладі схеми рисунку 1.13,а).

1. Довільно направляємо струми у вітках – рисунок 1.13,а.
2. Розраховуємо часткові струми від дії кожної ЕРС чи кожного джерела струму окремо. При цьому треба закорочувати інші джерела напруги та розми-

кати джерела струму (враховуємо також, що не треба закорочувати внутрішні опори джерел енергії, якщо останні задані).

Для схеми (рис. 1.16,а) визначаємо часткові струми від дії ЕРС E_1 :

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}, \quad I_2' = I_1' \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_3' = I_1' \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = I_1' - I_2';$$

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}}, \quad I_1'' = I_2'' \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \quad I_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = I_2'' - I_1'';$$

$$I_3''' = \frac{E_3}{R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}, \quad I_2''' = I_3''' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad I_1''' = I_3''' \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = I_3''' - I_2'''.$$

3. Алгебраїчно підсумовуємо часткові струми, орієнтуючись при цьому на обрані напрямки струмів у вихідній схемі.

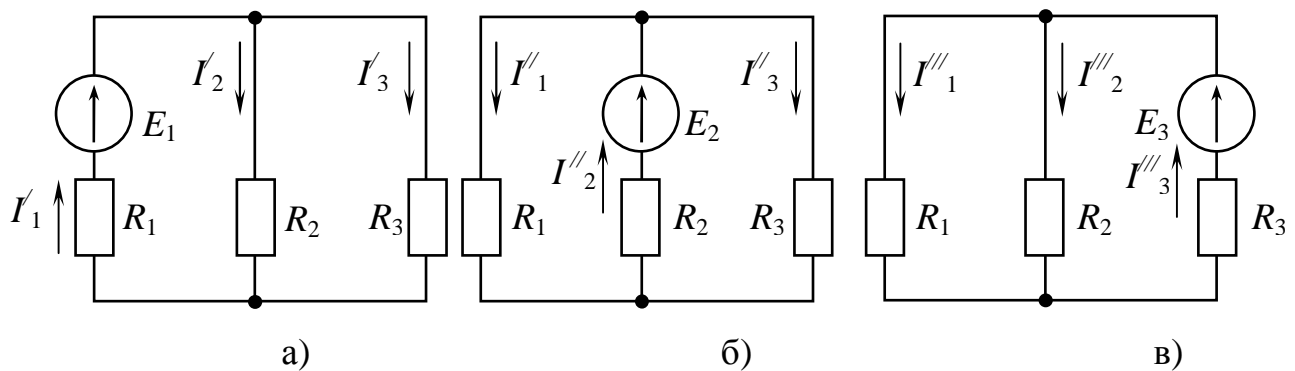


Рисунок 1.16

$$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''', \quad I_2 = I_2' - I_2'' - I_2'''; \quad I_3 = I_3' - I_3'' - I_3'''.$$

Примітка: частковими струмами не можна користуватися при розрахунку потужностей - $I_1^2 \cdot R_1 \neq I_1'^2 \cdot R_1 + I_1''^2 \cdot R_1 + I_1'''^2 \cdot R_1$.

1.11.5 Принцип лінійності

Якщо в лінійному колі змінюється ЕРС або опір в якій-небудь одній вітці, то дві будь-які величини (струми і напруги) двох будь-яких віток зв'язані один з одним лінійними залежностями виду: $y = a + b \cdot x$. Тобто, якщо у схемі рисунку 1.12 змінюється E_3 ($0 \leq E_3 \leq \infty$), то можна довести, що струми I_1 і I_2 зв'язані залежністю:

$$I_1 = a + b \cdot I_2. \quad (1.41)$$

1.12 Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник опорів (і навпаки)

Зіркою опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому всі початки опорів, з'єднані в одну точку (рис. 1.17,а), трикутником опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому початок одного опору з'єднується з кінцем іншого (рис. 1.17,б).

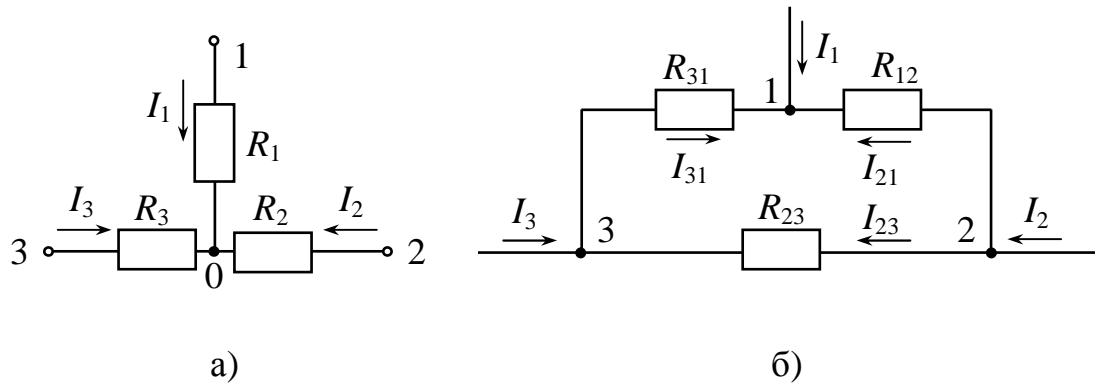


Рисунок 1.17

Схеми рисунку 1.17,а і рисунку 1.17,б еквівалентні у відношенні струмів I_1, I_2, I_3 та потенціалів вузлів 1, 2 і 3.

За першим законом Кірхгофа та Ома (рис.1.7, а):

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0; \quad (1.42)$$

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) \cdot G_1, \quad (1.43)$$

$$I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0) \cdot G_2; \quad (1.44)$$

$$I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0) \cdot G_3. \quad (1.45)$$

Рівняння (1.43), (1.44), (1.44) підставимо в (1.45):

$$\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 G_3 = \varphi_0 \cdot (G_1 + G_2 + G_3). \quad (1.46)$$

$$\text{Звідки } \varphi_0 = \frac{\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (1.47)$$

Підставимо (1.47) в (1.42), отримаємо (1.48):

$$I_1 = \varphi_1 \cdot G_1 - \frac{\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \varphi_1 \cdot \left(G_1 - \frac{G_1^2}{G_1 + G_2 + G_3} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{G_2 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3} - \varphi_3 \cdot \frac{G_3 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Розглянемо схему рисунку 1.17,б.

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1) \cdot G_{31} = \varphi_1 (G_{12} + G_{31}) - \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{31}. \quad (1.49)$$

Коефіцієнти при потенціалах рівнянь (1.48) будуть ті ж самі, що й коефіцієнти при цих же потенціалах рівняння (1.49).

Тому:

$$G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (1.50)$$

$$G_{31} = \frac{G_3 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (1.51)$$

$$G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (1.52)$$

Формула (1.52) може бути отримана, якщо провести аналогічні дії для струму I_2 .

З іншого боку:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2}{R_3} = \\ &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = \frac{m}{R_3}; \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$R_{23} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_2 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = \frac{m}{R_1}; \quad (1.54)$$

$$R_{31} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2} = \frac{m}{R_2}. \quad (1.55)$$

$$\text{де } m = R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3. \quad (1.56)$$

Виразимо опори зірки через допоміжну величину m :

$$R_1 = \frac{m}{R_{23}}, R_2 = \frac{m}{R_{31}}, R_3 = \frac{m}{R_{12}}. \quad (1.57)$$

Підставимо вирази (1.57) в формулу (1.56) для m , отримаємо:

$$\begin{aligned} m &= \frac{m}{R_{23}} \cdot \frac{m}{R_{31}} + \frac{m}{R_{31}} \cdot \frac{m}{R_{12}} + \frac{m}{R_{12}} \cdot \frac{m}{R_{23}} = \left(\frac{m^2}{R_{23} \cdot R_{31}} + \frac{m^2}{R_{31} \cdot R_{12}} + \frac{m^2}{R_{12} \cdot R_{23}} \right) \Rightarrow \\ 1 &= m \cdot \left(\frac{R_{12} + R_{23} + R_{31}}{R_{12} \cdot R_{31} \cdot R_{23}} \right) \Rightarrow m = \frac{R_{12} \cdot R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Підставимо (1.58) в вирази (1.57), отримаємо:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.59)$$

Формули (1.53) ÷ (1.55) застосовують для переходу від зірки опорів до трикутника опорів, а формули (1.59) – для переходу від трикутника опорів до зірки.

1.13 Двополюсник. Теорема про еквівалентний генератор.

Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці

У будь-якій електричній схемі завжди можна виділити яку-небудь вітку, а всю частину схеми, що залишилася, незалежно від її складності, умовно позначити прямокутником з двома вихідними затискачами (рис. 1.19,а). По відношенню до виділеної вітки ця частина схеми, що залишилася, є *двополюсником*.

Таким чином, *двополюсник* – це узагальнена назва схеми, що двома своїми вихідними затискачами приєднується до виділеної вітки. Двополюсники бувають активними (якщо мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії) та пасивними (якщо не мають у своєму складі джерел енергії).

Теорема про *еквівалентний генератор*: будь-який активний двополюсник по відношенню до виділеної вітки можна замінити еквівалентним джерелом напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі неробочого ходу, а внутрішній опір – входному опору пасивного двополюсника.

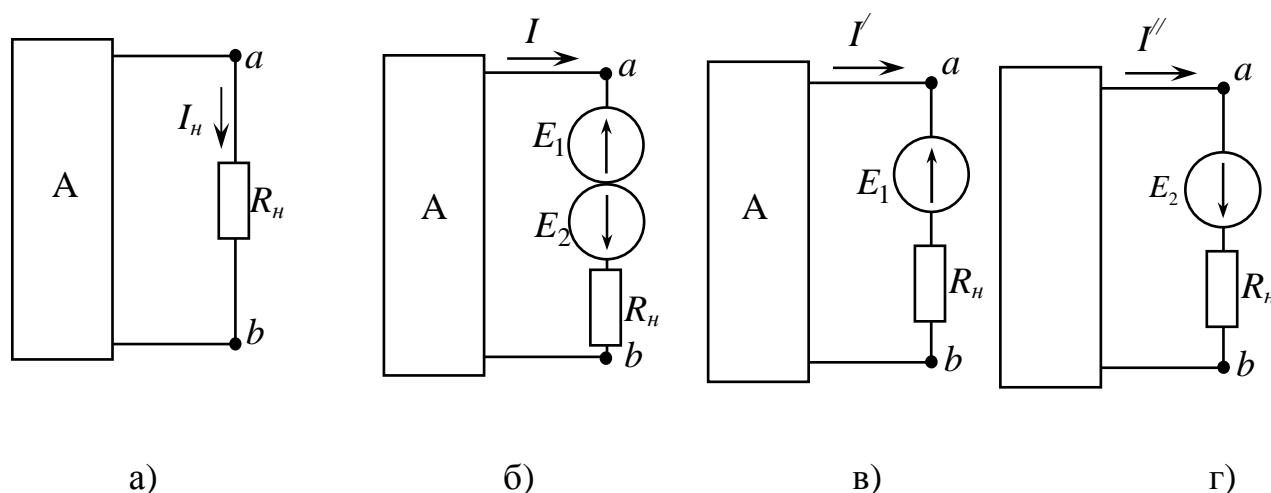


Рисунок 1.18

Доведення: У вітку "ab" ввімкнемо дві рівні, але протилежно спрямовані ЕРС E_1 та E_2 (рис. 1.18,б). Відповідно до принципу накладання (рис. 1.18,в; рис. 1.18,г):

$$I_n = I' + I'', \quad (1.60)$$

де I' – частковий струм вітки з опором R_n , що викликаний ЕРС E_1 і всіма джерелами ЕРС та джерелами струму активного двополюсника;

I'' – частковий струм, що викликаний тільки джерелом ЕРС E_2 ($E_2 = E_1$).

За законом Ома:

$$I' = \frac{U_{ab} - E_1}{R_n}. \quad (1.61)$$

Виберемо E_1 таким чином, щоб $I' = 0$, тобто – це режим неробочого ходу (вітка "ab" – розімкнута). Тоді зрозуміло, що $E_1 = E_2 = U_{ab} = U_{abnx}$ та

$$I_n = I'' = \frac{E_2}{R_n + R_{ex}}, \text{ або } I_n = \frac{U_{abnx}}{R_n + R_{ex}}. \quad (1.62)$$

де U_{abnx} – напруга неробочого ходу на розімкнутих затискачах "ab";

R_{ex} – вхідний опір двополюсника відносно вхідних затискачів;

R_n – опір вітки "ab".

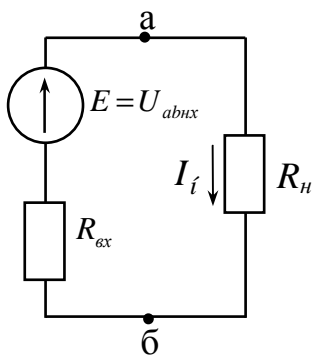


Рисунок 1.19

Сукупність ЕРС $E_2 = U_{abnx}$ і внутрішнього опору R_{ex} можна розглядати як еквівалентний генератор з ЕРС, що дорівнює U_{abnx} , і внутрішнім опором, що дорівнює R_{ex} . Формула (1.50) відповідає схемі рисунку 1.19. Теорема доведена.

Використовують теорему для розрахунку струму в одній вітці електричного кола і цей метод розрахунку за розглянутою теоремою має назви:

- еквівалентного генератора;

- активного двополюсника;
- неробочого ходу та короткого замикання.

Порядок розрахунку за методом:

1. Вилучають опір у тій вітці, де треба визначити струм.
2. Визначають R_{ex} , при цьому закорочують усі ЕРС (якщо у джерела напруги заданий внутрішній опір, то його не закорочують), і розривають всі джерела струму.
3. Визначають напругу неробочого ходу на розімкнутих затискачах U_{yx} .
4. За формулою (1.50) визначають струм.

Приклад розрахунку для схеми (рис. 1.20,а) за методом наведений нижче:

$$I_2 = \frac{U_{abnx}}{R_2 + R_{ex}} - \text{схема рисунку 1.20, б; } U_{abnx} = -E_2 + I_{nx} \cdot (R_3 + R_4) \text{ (рис. 1.20, б);}$$

$$I_{nx} = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} \text{ (рис. 1.20,б); } R_{ex} = \frac{R_1 \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} \text{ (рис. 1.20,г).}$$

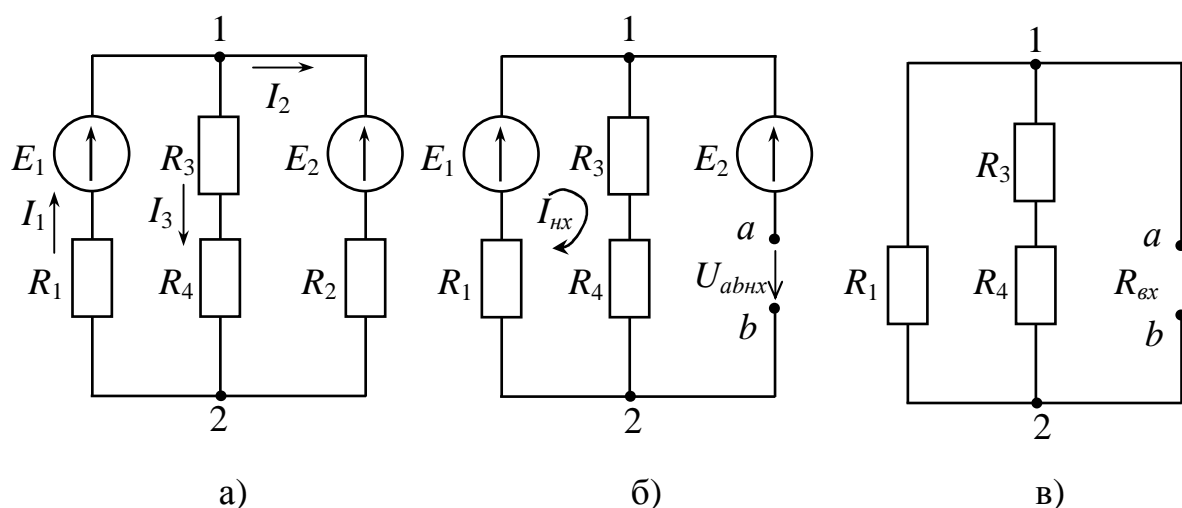


Рисунок 1.20

1.14 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження

Припустимо, що навантаження R_H підключене до активного двополюсника (рис. 1.18, а), при чому $R_{\text{вх}} = \text{const}$, $0 \leq R_H \leq \infty$.

Знайдемо, при якому співвідношенні опорів $R_{\text{вх}}$ та R_H буде передаватися максимальна потужність від активного двополюсника навантаженню:

$$P_H = I_H^2 \cdot R_H, \quad (1.63)$$

$$I_H = \frac{U_{\text{абнх}}}{R_H + R_{\text{вх}}}, \quad (1.64)$$

$$\text{Отже, } P_H = \frac{U_{\text{абнх}}^2}{(R_H + R_{\text{вх}})^2} \cdot R_H. \quad (1.65)$$

Для знаходження максимуму функції $P_H = f(R_H)$ треба взяти похідну виразу (1.53) й дорівняти її до нуля:

$$\frac{dP_H}{dR_H} = \frac{U_{\text{абнх}}^2 \cdot ((R_H + R_{\text{вх}})^2 - 2 \cdot (R_H + R_{\text{вх}}) \cdot R_H)}{(R_H + R_{\text{вх}})^4} = 0. \quad (1.66)$$

$$\text{Звідки } (R_H + R_{\text{вх}})^2 - 2 \cdot (R_H + R_{\text{вх}}) \cdot R_H = 0 \Rightarrow R_{\text{вх}}^2 - R_H^2 = 0 \Rightarrow R_{\text{вх}} = R_H. \quad (1.67)$$

Оскільки друга похідна $\frac{d^2 P_H}{dR_H^2} < 0$, то умова $R_{\text{вх}} = R_H$ відповідає саме максимуму функції $P_H = f(R_H)$.

Підставимо (1.55) в (1.53) і отримаємо максимальну потужність наванта-

$$\text{ження: } P_{H \text{ max}} = \frac{U_{\text{абнх}}^2}{4 \cdot R_H}. \quad (1.68)$$

Коефіцієнт корисної дії (К.К.Д., η) при $R_{\text{вх}} = R_{\text{н}}$:

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{повн}}} = \frac{U_{\text{авнх}}^2 \cdot R_{\text{н}}}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вх}})^2 \cdot U_{\text{авнх}} \cdot I} = \frac{U_{\text{авнх}}^2 \cdot R_{\text{н}} \cdot (R_{\text{н}} + R_{\text{вх}})}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вх}})^2 \cdot U_{\text{авнх}}^2} = \frac{R_{\text{н}}}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вх}})} \quad (1.69)$$

де $P_{\text{повн}} = U_{\text{авнх}} \cdot I = \frac{U_{\text{авнх}}^2}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вх}})}$ - повна потужність, що виробляється еквівалентним генератором.

Таким чином, $\eta = 0,5$ якщо $R_{\text{вх}} = R_{\text{н}}$. При $R_{\text{н}} > R_{\text{вх}}$ - $\eta > 0,5$.

Висновок: якщо потужність $P_{\text{н}}$ значна, то працювати з таким низьким К.К.Д. ($\eta = 0,5$) неприпустимо. Але якщо $P_{\text{н}}$ мала (наприклад потужність різних датчиків пристроїв автоматики), то такий низький К.К.Д. вважають задовільним, оскільки при цьому віддається максимально можлива активна потужність навантаженню.

Узгодження навантаження - вибір величини навантаження $R_{\text{н}}$ рівним $R_{\text{вх}}$ активного двополюсника.

1.15 Передача енергії по лініям передачі

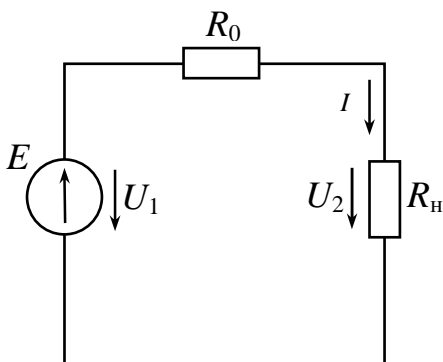


Рисунок 1.21

Спрощена схема передачі електричної енергії зображена на рисунку 1.21

На схемі позначено:

- U_1 - напруга генератора на початку лінії;
- U_2 - напруга на навантаженні (кінець лінії);
- $R_{\text{н}}$ - навантаження наприкінці лінії;
- R_0 - опір проводів.

У реальних лініях передач $\eta = 0,94 \div 0,97$, тому U_2 лише на кілька процентів відрізняється від U_1 .

Побудуємо криві (рис. 1.22), які повністю характеризують режим роботи лінії, при $U_1 = \text{const}$:

1. $P_1 = U_1 \cdot I$ - потужність генератора;
2. $U_2 = U_1 - I \cdot R_0$ - напруга на навантаженні;
3. $P_2 = P_1 - I^2 \cdot R_0 = U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0 = I \cdot (U_1 - I \cdot R_0)$ - потужність в навантаженні;

$$4. \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0}{U_1 \cdot I} = 1 - \frac{I \cdot R_0}{U_1} = \frac{I^2 \cdot R_{\text{н}}}{(R_0 + R_{\text{н}}) \cdot I^2} = \frac{R_{\text{н}}}{R_0 + R_{\text{н}}} - \text{К.К.Д.}$$

При $P_2 = \text{const}$ з підвищенням U_2 можна зменшити значення струму I і тому втрати у проводах $P_{\text{пр}}$ знижуються, що дозволяє зменшити переріз

проводів:

$$P_{np} = R_0 \cdot I^2 = \rho \cdot \frac{l_{np}}{S_{np}} \cdot \left(\frac{P_2}{U_2} \right)^2, \quad (1.70)$$

де l_{np}, S_{np} – довжина та перетин проводів.

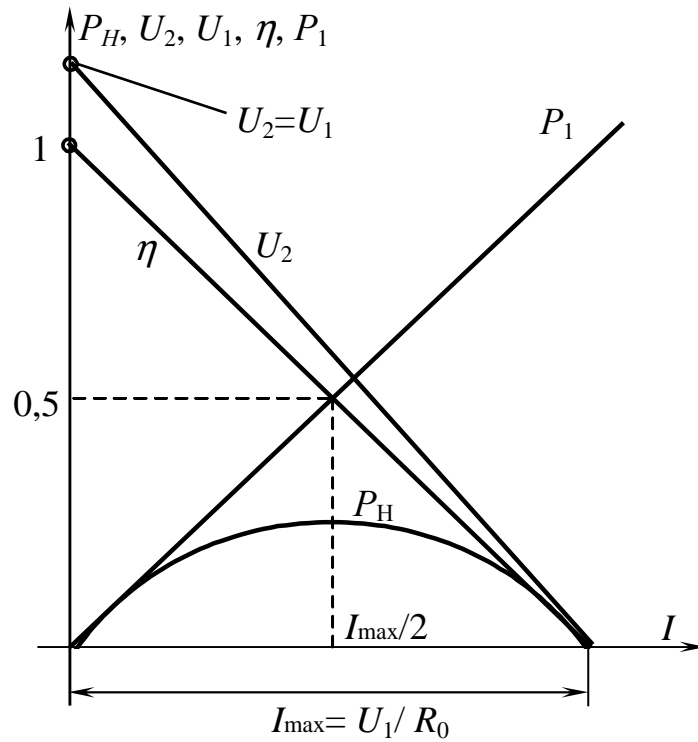


Рисунок 1.22 – Графіки $U_H(I)$, $P_H(I)$, $\eta(I)$

РОЗДІЛ 2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

2.1 Основні величини, що характеризують синусоїдний струм

Струм, що змінюється за законом синуса, називається *синусоїдним* (рис. 2.1). Миттєве значення такого струму:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right), \quad (2.1)$$

де I_m – амплітудне, тобто максимальне значення струму, А;

φ – початкова фаза, визначає величину зсуву синусоїди відносно початку координат (якщо $\varphi > 0$ синусоїда зсунута вліво, а якщо $\varphi < 0$ синусоїда зсунута вправо), рад;

T – період, тобто час, за який відбувається одне повне коливання, с;

f – частота коливань, тобто кількість коливань в секунду, 1/с=Гц;

ω – кутова частота, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, рад/с;

$(\omega \cdot t + \varphi)$ – фаза, аргумент синуса, характеризує стан коливання.

Якщо у синусоїдних величин однієї частоти однакові початкові фази, то говорять, що такі синусоїдні величини співпадають за фазою; якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm \pi$, то говорять, що ці функції знаходяться у протифазі, якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm \pi/2$, то говорять, що ці функції знаходяться у квадратурі.

Синусоїдні струми відносно низьких частот отримують за допомогою синхронних генераторів, а синусоїдні струми високої частоти (більш десятків кілогерц) – за допомогою напівпровідникових генераторів.

На рисунку 2.1 показана крива миттєвого значення струму (так звана хвилюва діаграма), коли $\varphi > 0$.

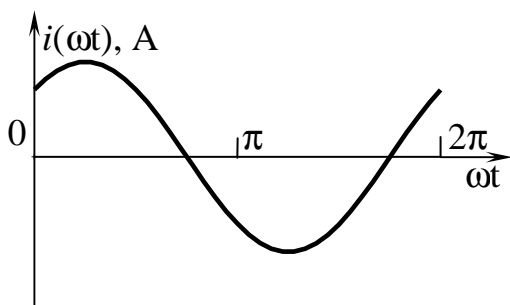


Рисунок 2.1

Синусоїдна величина характеризується значеннями:

- миттєвим,
- амплітудним,
- середнім
- діючим.

Середнє значення синусоїдної величини – це її середнє значення за половину періоду:

$$I_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m, \quad I_{cp} \approx 0,638 \cdot I_m. \quad (2.2)$$

Діюче значення синусоїдного струму чисельно дорівнює значенню постійного струму, який за час, що дорівнює періоду T , викликає виділення такої кількості тепла в провіднику з опором R , що і синусоїдний струм за той же час T . Діючий струм називають ще *ефективним* або *середньоквадратичним*.

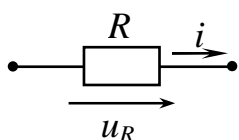
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 \cdot \sin \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (2.3)$$

Коефіцієнти, що характеризують синусоїдну функцію:

– коефіцієнт амплітуди $k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}$;

– коефіцієнт форми $k_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2 / \pi \cdot I_m} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$.

2.2 Синусоїдний струм активного опору



Взагалі активний опір резистора на змінному струмі R_{\sim} є більшим, ніж активний опір на постійному струмі R_{-} , внаслідок явищ концентрації струму в поверхневих шарах провідника (поверхневий ефект) і ефекту близькості. Але будемо вважати, що $R_{\sim} = R_{-}$.

Нехай по активному опору тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin \omega t$ (рис. 2.2).

За законом Ома:

$$u_R = i \cdot R = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t = U_m \cdot \sin \omega t, \quad (2.4)$$

де $U_m = I_m \cdot R$ – амплітудне значення напруги на активному опорі. (2.5)

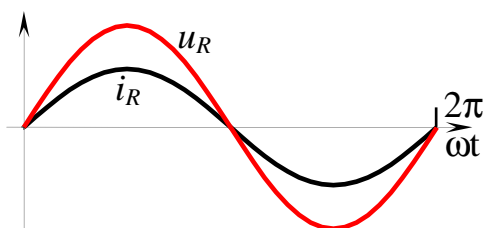


Рисунок 2.3

З (2.5) бачимо, що струм і напруга на активному опорі співпадають за фазою (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює нулю: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$ – рисунок 2.3).

1) Швидкість надходження енергії від джерел характеризується потужністю. *Миттєва потужність* – добуток миттєвої напруги на ділянці кола та миттєвого струму. Для активного опору:

$$P_R = u_R \cdot i_R = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega t)). \quad (2.6)$$

Таким чином бачимо, що миттєва потужність в активному опорі має постійну складову – $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$, та змінну складову – $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos(2\omega t)$ з частотою в 2

рази більшою, ніж частота синусоїдного струму.

Активна потужність – це середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_R = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} p_R dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \cdot I = I^2 \cdot R. \quad (2.7)$$

2.3 Синусоїдний струм індуктивності

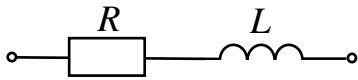


Рисунок 2.4

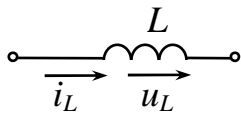


Рисунок 2.5

Будь-яка обмотка (катушка) має індуктивність і активний опір. На схемі катушку зазвичай позначають так, як показано на рисунку 2.4, у ній R дозволяє врахувати при розрахунках теплові втрати в обмотці і в осерді, а індуктивність L – явища самоіндукції і накопичування енергії магнітного поля. Виділимо зі схеми рисунку 2.2 тільки одну індуктивність – рисунок 2.5. Нехай по активному опору тече синусоїдний струм: $i = I_m \cdot \sin \omega t$. (2.8)

У катушці наводиться ЕРС:

$$e_L = -L \cdot \frac{di}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cos(\omega t) = -\omega \cdot L \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (2.9)$$

Додатний напрямок ЕРС співпадає зі струмом, а напруга на індуктивності:

$$u_L = -e_L = L \cdot \frac{di}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{mL} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (2.10)$$

де $U_{mL} = I_m \cdot \omega \cdot L = I_m \cdot X_L$ – амплітудне значення напруги на індуктивному опорі; (2.11)

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \text{ – індуктивний опір, Ом.} \quad (2.12)$$

З (2.9) бачимо, що напруга в індуктивності випереджає струм на 90° (різ-

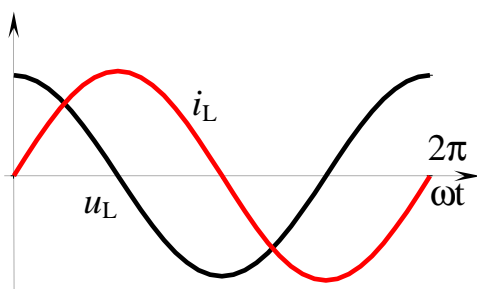


Рисунок 2.6

ниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$). Тобто якщо $u_L = 0$, то i_L досягає максимального значення (і навпаки) – рисунок 2.6.

Миттєва потужність індуктивності може мати додатний знак – тоді індуктивність накопичує енергію, що береться з джерела, і від'ємний знак – тоді індуктивність віддає енергію до

джерела.

Активна потужність індуктивності – середнє значення миттєвої: потужності

$$\text{за період: } P_L = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_L dt = 0. \quad (2.13)$$

2.4 Синусоїдний струм ємності

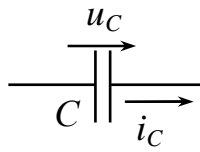


Рисунок 2.7

Ємність (рис. 2.7) як елемент схеми заміщення дозволяє врахувати явища заряду конденсатора і накопичування енергії електричного поля, а паралельно включений резистор враховує втрати у неідеальному діелектрику конденсатора (рис. 1.3,б)

$$\text{Якщо } u_C = \text{const}, \text{ то } i_C = \frac{dq}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

$$\text{Якщо } u_C = U_{mC} \cdot \sin(\omega t), \quad (2.15)$$

то ємність періодично перезаряджається, що супроводжується протіканням через неї зарядного струму:

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = \frac{d(C \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t))}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_{mC} \cdot \cos(\omega t) = \\ &= \frac{1}{X_C} \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = I_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{де } I_{mC} = \frac{U_{mC}}{1/\omega \cdot C} = \frac{U_{mC}}{X_C} - \text{амплітудне значення струму через ємність}, \quad (2.17)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} - \text{ємнісний опір, Ом}. \quad (2.18)$$

З (2.15) і (2.16) ми бачимо, що струм ємності випереджає напругу на ній на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$) – рисунок 2.8. Тобто, якщо $u_C = 0$, то i_C досягає максимального значення (і навпаки).

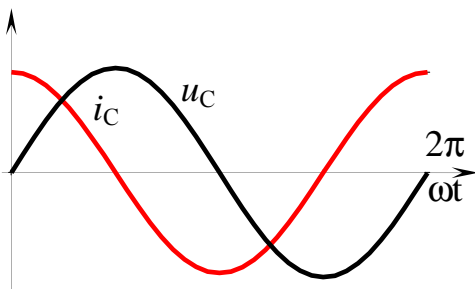


Рисунок 2.8

Миттєва потужність ємності (може мати додатний і від'ємний знаки):

$$\begin{aligned} p_C &= u_C \cdot i_C = U_{mC} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \\ &= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Активна потужність ємності:

$$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_C dt = 0 \quad (2.20)$$

2.5 Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

Розглянемо послідовне з'єднання активного опору, ємності, індуктивності (рис. 2.9). Нехай до кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ і протікає синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

$$\text{За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень: } u = u_R + u_C + u_L. \quad (2.21)$$

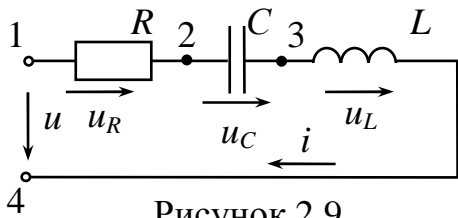


Рисунок 2.9

З урахуванням раніш розглянутого (пункти 2.3, 2.4, 2.5):

$$u = I_m R \sin(\omega t) - I_m X_C \cos(\omega t) + I_m X_L \cos(\omega t),$$

або

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot (R \cdot \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \cdot (X_L - X_C)). \quad (2.22)$$

$$\text{Позначимо } X = X_L - X_C \text{ – повний реактивний опір кола.} \quad (2.23)$$

$$\text{Тоді } R \cdot \sin(\omega t) + X \cdot \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.24)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{X}{R} \text{ – кут зсуву фаз між напругою } u \text{ і струмом } i; \quad (2.25)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ – модуль повного опора кола.} \quad (2.26)$$

Отже вираз (2.22) можна записати так:

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.27)$$

$$\text{або } U_m = I_m \cdot Z. \quad (2.28)$$

Розглянемо схему рисунку 2.10 – паралельне з'єднання трьох елементів – активного опора, ємності й індуктивності.

$$u_C = U_m \cdot \sin(\omega t), \quad i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) \text{ – напруга та струм на вході кола.}$$

$$\text{За першим законом Кірхгофа: } i = i_R + i_C + i_L. \quad (2.29)$$

З урахуванням раніш розглянутого (пункти 2.3, 2.4, 2.5) струми віток:

$$i_R = U_m \cdot G \cdot \sin(\omega t), \quad (2.30)$$

$$i_C = U_m \cdot B_C \cdot \cos(\omega t) = U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t), \quad (2.31)$$

$$i_L = -U_m \cdot B_L \cdot \cos(\omega t), \quad (2.32)$$

$$\text{де } G = \frac{1}{R} \text{ – активна провідність.} \quad (2.33)$$

$$B_C = \omega \cdot C \text{ – реактивна ємнісна провідність.} \quad (2.34)$$

$$B_L = \frac{1}{\omega \cdot L} \text{ – реактивна індуктивна провідність.} \quad (2.35)$$

Тоді вираз (2.29) має вигляд:

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot [G \cdot \sin(\omega t) - (B_L - B_C) \cdot \cos(\omega t)], \quad (2.36)$$

$$\text{або } I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot \sqrt{G^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi), \quad (2.37)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{B}{G} \text{ – кут зсуву фаз між напругою і струмом,} \quad (2.38)$$

$$B = B_L - B_C \text{ – реактивна провідність.} \quad (2.39)$$

$$\text{Застосуємо позначення: } Y = \sqrt{G^2 + B^2} \text{ – повна провідність кола.} \quad (2.40)$$

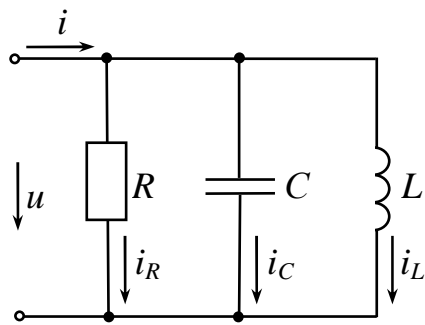


Рисунок 2.10

Остаточно маємо:

$$I_m = U_m \cdot Y. \quad (2.41)$$

Формули (2.23), (2.25), (2.26), (2.28), (2.33), (2.34), (2.35), (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) – основа для розрахунку найпростіших кіл синусоїдного струму тригонометричним методом.

2.6 Потужність в колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна)

Припустимо, що до ділянки кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin \omega t$, а синусоїдний струм її – $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

Миттєва потужність:

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U \cdot I \cdot (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)). \quad (2.42)$$

Активна потужність – це середнє значення миттєвої потужності p за період, тобто енергія, що виділяється в одиницю часу у вигляді теплоти на ділянці кола, що містить опір R :

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cdot \pi = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad (2.43)$$

де $\cos \varphi$ – коефіцієнт потужності.

При розрахунках синусоїдних кіл застосовують поняття *реактивної* потужності: $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$ (2.44)

Реактивна потужність – величина, що характеризує навантаження, створювані в електротехнічних пристроях коливаннями енергії електромагнітного поля в колі синусоїдального струму, Фізичний зміст реактивної потужності – це енергія, що передається від джерела на реактивні елементи приймача, а потім повертається цими елементами назад до джерела протягом одного періоду коливань, віднесена до цього періоду. Реактивна потужність додатна при струмі, що відстає (R - L навантаження, $\varphi > 0$) і від'ємна при струмі, що випереджає (R - C навантаження, $\varphi < 0$). Тобто індуктивність можна умовно розглядати як споживача реактивної енергії, а ємність – як її генератор.

Оскільки електричні машини й апарати конструюють для роботи на певні значення струмів і напруг, то їх характеризують не активною, що залежить від $\cos \varphi$, а *повною* потужністю:

$$S = U \cdot I. \quad (2.45)$$

Повна потужність показує ту активну потужність, яку джерело енергії може віддати споживачеві, якщо останній працює при $\cos \varphi = 1$.

$$\text{Зв'язок між усіма трьома видами потужностей: } S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (2.46)$$

Трикутники опорів, провідностей і потужностей представлені на рисунку 2.11.

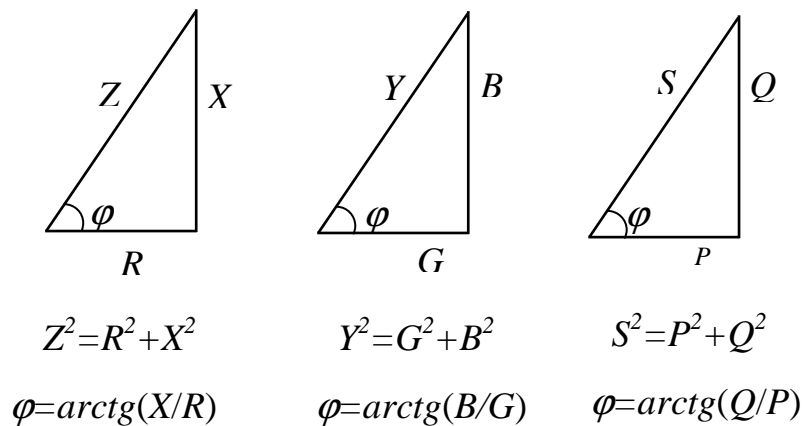


Рисунок 2.11

2.7 Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл

Розрахунок електричних кіл суттєво полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами, або комплексними числами.

Відповідно до формули Ейлера комплексне число $e^{j \cdot \alpha}$ дорівнює: $e^{j \cdot \alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$. (2.47)

На комплексній площині воно зображується вектором, що має одиничну довжину та складає з віссю дійсних чисел кут α (рис. 2.12). Проекція $e^{j \cdot \alpha}$ на вісь

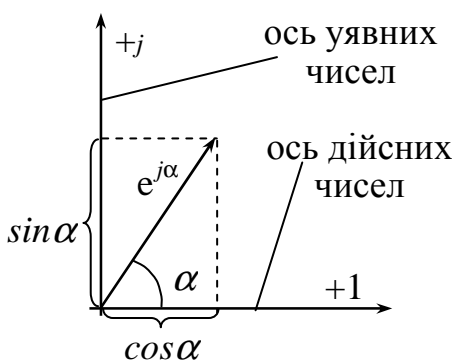


Рисунок 2.12

дійсних чисел – $\cos \alpha$, а на вісь уявних чисел – $\sin \alpha$; $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Якщо замість числа $e^{j \cdot \alpha}$ розглянути число $I_m \cdot e^{j \cdot \alpha}$, то відповідно до формули Ейлера $I_m \cdot e^{j \cdot \alpha} = I_m \cdot \cos \alpha + j \cdot I_m \cdot \sin \alpha$, і на комплексній площині воно зображується вектором, що має довжину I_m і також складає з віссю дійсних чисел кут α . Кут α може бути будь-яким. Припустимо,

що $\alpha = \omega \cdot t + \varphi$, тоді

$$I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi). \quad (2.48)$$

де $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – дійсна частина,

$I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ – коефіцієнт при уявній одиниці j .

Таким чином, синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ можна уявити як прое-

кцію вектора $I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$, що обертається з кутовою швидкістю ω , на ось уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення вектора $I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)}$ повністю визначає синусоїдну функцію $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, а комплексне число $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi}$ зветься комплексною амплітудою струму ($e^{j\omega t}$ – оператор обертання). Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити прості операції.

Примітка: на комплексній площині від'ємні кути відкладаються проти годинникової стрілки від осі дійсних чисел, негативні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Розглянемо приклад розв'язання задачі на комплексній площині.

Для схеми рисунку 2.13, а задані струми в паралельних вітках $i_1 = 10 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ)$, $i_2 = 5 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$.

Знайти: струм i .

За першим законом Кірхгофа для миттєвих значень струму $i = i_1 + i_2$.

Будуємо на комплексній площині вектори, що зображують струми i_1 , i_2 (рис. 2.13,б), та складаємо їх для отримання загального струму i .

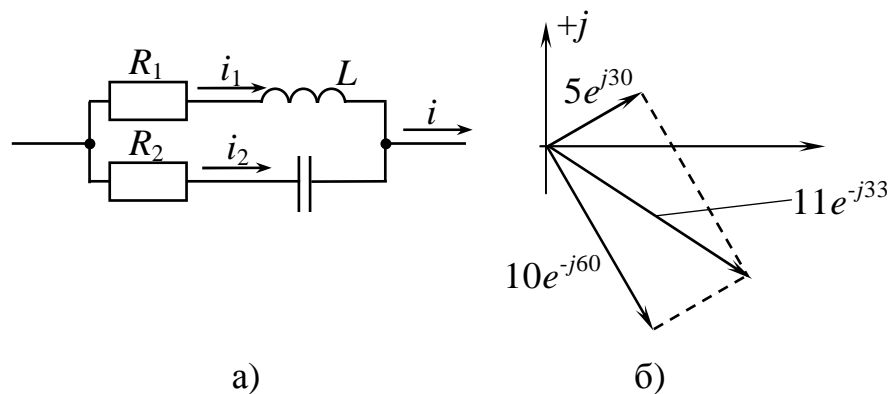


Рисунок 2.13

2.8 Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами

Існують чотири *форми* запису комплексних чисел:

- показова – $\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$;
- полярна – $\underline{I}_m = 5 \angle 30^\circ$;
- алгебраїчна – $\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$, де 4,33 – дійсна частина, $j \cdot 2,5$ – уявна частина;

- тригонометрична – $\underline{I}_m = 5 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$, як перехід від полярної форми ($\underline{I}_m = 5 \cdot \angle 30^\circ$) до алгебраїчної ($\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$).

Дії над комплексними числами:

- множення проводять у полярній або показовій формі, наприклад:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 5 \cdot \angle 30^\circ \cdot 15 \cdot \angle -40^\circ = 75 \cdot \angle -10^\circ, \text{ В.}$$

- ділення роблять також у полярній або показовій формі, наприклад:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{75 \cdot \angle -10^\circ}{15 \cdot \angle -40^\circ} = 5 \angle 30^\circ, \text{ А}$$

- складання або віднімання роблять в алгебраїчній формі, наприклад:

$$\underline{I}_{m1} = 10 \angle (-60^\circ) = 10 \cdot \cos(-60^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(-60^\circ) = 5 - j \cdot 8,66,$$

$$\underline{I}_{m2} = 5 \angle 30^\circ = 10 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 4,33 + j \cdot 2,5,$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 5 - j \cdot 8,66 + 4,33 + j \cdot 2,5 = 9,33 - j \cdot 6,16.$$

Перехід від алгебраїчної до полярної форми має деякі особливості.

Так, якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в першій або четвертій чвертях комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle 30^\circ \text{ (перша чверть);}$$

$$\underline{I}_m = 4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(-\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle (-30)^\circ \text{ (друга чверть).}$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у другій чверті комплексної площини перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle 150^\circ.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в третій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(- \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right) \right)^\circ = 5 \angle (-150)^\circ.$$

Примітки: $\frac{1}{j} = -j$; множення вектора на уявне число j означає його поворот на 90° проти годинникової стрілки.

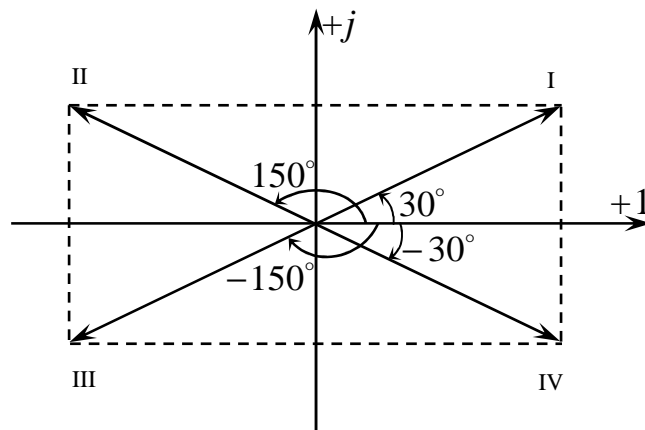


Рисунок 2.14

2.9 Символічний (комплексний) метод розрахунку кін синусоїдного струму

Суть методу полягає в тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені відносно комплексних струмів, ЕРС і напруг. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщує її, диференціювання замінюється множенням на $j\omega$, а інтегрування – діленням на $j\omega$

2.10 Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Розглянемо просте електричне коло (рис. 2.9), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$ і в якому тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Інтегрально-диференціальне рівняння, що характеризує стан кола (другий закон Кірхгофа) – $u = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt$. (2.49)

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг має вигляд

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_m - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC}. \quad (2.50)$$

– другий закон Кірхгофа в комплексній формі.

Застосуємо позначення:

$$X_L = \omega \cdot L, \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} - \quad (2.51)$$

відповідно індуктивний, ємнісний, повний реактивний опори, модуль повного опора.

Тоді рівняння (2.50) набуває вигляду:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \left(R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right) = \underline{I}_m \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I}_m \cdot Z \cdot \angle \varphi, \quad (2.52)$$

$$\text{де } \underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = Z \angle \varphi - \text{комплекс повного опора кола}, \quad (2.53)$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} - \text{кут зсуву фаз між струмом і напругою}. \quad (2.54)$$

$$\text{Таким чином, закон Ома в комплексній формі} - \underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}. \quad (2.55)$$

Розглянемо коло (рис.2.10), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, і на вході якого тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів в інтегрально-диференціальній формі:

$$i = i_R + i_L + i_C = \overbrace{u \cdot G}^{i_R} + \overbrace{\frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt}^{i_L} + \overbrace{C \cdot \frac{du}{dt}}^{i_C}. \quad (2.56)$$

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг має вигляд:

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m \cdot G + \frac{\underline{U}_m}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{\underline{U}_m}{\left(-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \right)} = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC} - \quad (2.57)$$

– перший закон Кірхгофа в комплексній формі.

Висновки:

- алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю $\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$;
- алгебраїчна сума комплексних напруг уздовж замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС: $\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \sum_{k=1}^m \underline{E}_k$;
- оскільки в основі усіх розглянутих методів розрахунку кіл постійного струму лежать закони Кірхгофа, то всі вони можуть бути використані для розрахунку кіл синусоїдного струму в комплексній формі.

2.11 Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола

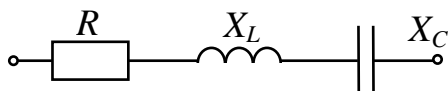


Рисунок 2.15

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на цій ділянці кола:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j \cdot \varphi}} = Y \cdot e^{-j \cdot \varphi} = G - j \cdot B, \quad (2.58)$$

де G – активна провідність;

$B = B_L - B_C$ – реактивна провідність.

Знайдемо G і B , якщо відомі R , $X = X_L - X_C$.

$$\underline{Y} = G - j \cdot B = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R - j \cdot X}{(R + j \cdot X) \cdot (R - j \cdot X)} = \frac{R - j \cdot X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (2.59)$$

$$\text{Тобто } G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad (2.60); \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}. \quad (2.61)$$

Знайдемо R і X , якщо відомі G і B .

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{G + j \cdot B}{(G - j \cdot B) \cdot (G + j \cdot B)} = \frac{G + j \cdot B}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \cdot \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

$$\text{Тобто } R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad (2.62)$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}. \quad (2.63)$$

2.12 Комплексна форма запису потужності.

Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму

Припустимо, напруга на ділянці кола – $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$, а струм – $\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$.

Кут зсуву фаз між напругою і струмом $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Тоді комплексом повної потужності називають:

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot \varphi} = P + j \cdot Q = U \cdot I \cdot \cos \varphi + U \cdot I \cdot \sin \varphi, \quad (2.64)$$

де $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i}$ – спряжене комплексне значення струму \underline{I} .

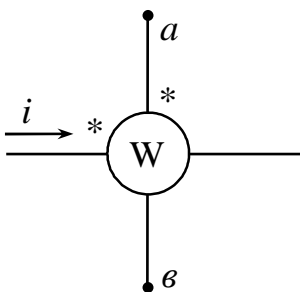


Рисунок 2.16

Вимірювання потужності здійснюють ватметром, наприклад, електродинамічної системи. Ватметр має дві котушки: одна – нерухома, підключена послідовно до ділянки кола, де роблять вимірювання потужності, виконана товстим проводом і має малий опір; друга – рухома, підключена паралельно ділянці кола, де роблять вимірювання потужності, виконана тонким проводом і має великий опір.

Знак «*» ставлять на кінцях однойменних затискачів.

Ватметр, показаний на рисунку 2.16, вимірює:

$$\operatorname{Re} \left[\tilde{S} \right] = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{av} \cdot \underline{I}^* \right] = U_{av} \cdot I \cdot \cos \left(\underline{U}_{av} \wedge \underline{I} \right).$$

У будь-якому колі повинен виконуватися баланс як активних, так і пасивних потужностей, тобто сума всіх потужностей, що віддаються джерелом повинна дорівнюватись сумі всіх потужностей, що приймаються споживачами:

$$\sum_{k=1}^n P_{\text{кджер}} = \sum_{k=1}^m P_{\text{кспож}}; \quad \sum_{k=1}^n Q_{\text{кджер}} = \sum_{k=1}^m Q_{\text{кспож}}. \quad (2.65)$$

2.13 Векторно-топографічні діаграми

Векторні діаграми – сукупність на комплексній площині векторів синусоїдних величин, що розглядаються, з дотриманням їх взаємної орієнтації.

Топографічна діаграма – сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі. Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то отримуємо *векторно-топографічну* діаграму.

Хвильова (часова) діаграма – крива миттєвих значень струмів, напруг тощо.

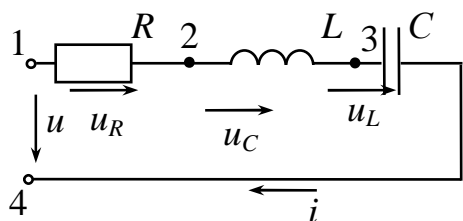


Рисунок 2.17

Розглянемо побудову векторно-топографічної діаграми на прикладі схеми рисунку 2.17:

Порядок побудови векторно-топографічної діаграми:

- розраховуємо комплекс струму \underline{I}_m ;
- визначаємо модулі напруг на окремих ділянках кола $U_{mR} = I_m \cdot R$, $U_{mL} = I_m \cdot X_L$, $U_{mC} = I_m \cdot X_C$;

- вибираємо масштаби за струмом і за напругою – m_I , m_U ;
- позначаємо точки на схемі (1÷4);

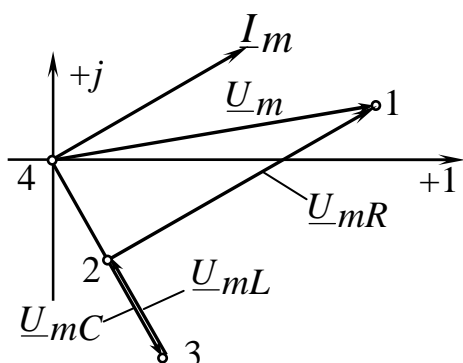


Рисунок 2.18

- останню точку (4 в нашому випадку) розташовуємо на початку координат, обхід робимо назустріч струму послідовно від останньої точки до першої; при цьому пам'ятаємо, що напруга на активному опорі співпадає зі струмом за фазою, напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90° , напруга на ємності відстає від струму за фазою на 90° .

На рисунку 2.18 наведено приклад побудови діаграми у випадку активно-ємнісного характеру кола (струм \underline{I}_m випереджає напругу $\underline{U}_m = \underline{U}_{m14}$ на вході кола).

2.14 Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження

При передачі сигналів, особливо слабких, від джерела до навантаження часто потрібно забезпечити максимальну потужність цього сигналу в навантаженні методом підбору параметрів навантаження.

До затискачів 11' активного двополюсника підключене навантаження – рисунок 2.19. При цьому $\underline{Z}_o = R_o + j \cdot X_o$ – вхідний опір активного двополюсника з боку затискачів 11', а $\underline{Z}_n = R_n + j \cdot X_n$ – опір навантаження.

За теоремою про активний двополюсник струм навантаження:

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{U}_{11'}}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_o} = \frac{\underline{U}_{11'}}{(R_n + R_o) + j \cdot (X_n + X_o)}. \quad (2.66)$$

$$P_n = I_n^2 \cdot R_n - \text{активна потужність навантаження} \quad (2.67)$$

Підставимо (2.66) в (2.67) і отримаємо:

$$P_n = \frac{U_{11'xx}^2}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_o} = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot R_n}{((R_n + R_o) + j \cdot (X_n + X_o))^2}. \quad (2.68)$$

Зрозуміло, що якщо $X_n = -X_o$ при будь-якому значенні R_n струм

$$I_n \rightarrow \max. \text{ При цьому } P_n = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot R_n}{(R_n + R_o)^2}. \quad (2.69)$$

Візьмемо від функції (2.69) похідну по R_n і дорівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dR_n} &= \frac{U_{11'xx}^2 \cdot ((R_n + R_o)^2 - 2 \cdot R_n \cdot (R_n + R_o))}{(R_n + R_o)^4} = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot (R_o^2 - R_n^2)}{(R_n + R_o)^4} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_o^2 - R_n^2 &= 0 \Rightarrow R_o = R_n. \end{aligned} \quad (2.70)$$

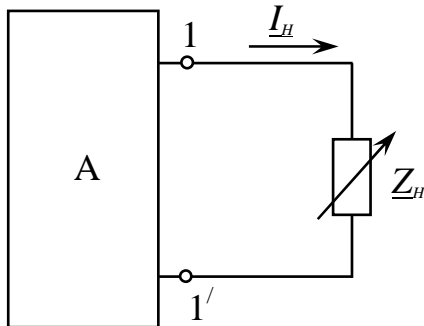


Рисунок 2.19

Тобто активна потужність P є максимальною, коли $\underline{Z}_o = \underline{Z}_n^*$ і умовами передачі максимальної активної потужності від активного двополюсника до навантаження є рівність комплексу вхідного опора \underline{Z}_o активного двополюсника спряженому комплексу \underline{Z}_n^* навантаження.

2.15 Резонанс у послідовному коливальному контурі

Резонансний режим – це такий режим роботи кола, що містить хоча б одну індуктивність і хоча б одну ємність, під час якого вхідний опір є чисто активним.

Розрізняють два резонансних режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Резонанс напруг – це такий режим роботи кола, що містить послідовно поєднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході співпадає за фазою зі вхідною напругою. Резонанс напруг відбувається в так званому послідовному коливальному контурі – рисунок 2.9. У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним: $X = X_L - X_C = 0$, $\underline{Z}_{\text{вх}} = R$, а сумарна реактивна потужність $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Домогтися резонансу можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Вводимо наступні поняття:

1) *резонансна частота* – частота під час резонансу ω_0 , яка знаходиться з

$$\text{умови } X_L = X_C, \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \quad (2.71)$$

2) *хвильовий (характеристичний) опір* – це ємнісний або індуктивний опір

$$\text{під час резонансу, тобто } \rho = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (2.72)$$

3) *добротність контуру* – це відношення напруги на ємності чи напруги на індуктивності до вхідної напруги; показує в скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більше напруги на вході під час резонансу:

$$q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 \cdot L \cdot I}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}. \quad (2.73)$$

Під час резонансу енергія магнітного поля дорівнює енергії електричного поля і відбувається постійний перехід енергії магнітного поля в енергію електричного. Сума миттєвих значень енергії магнітного і електричного полів - це миттєва енергія електромагнітного поля:

$$w_{\text{ем}} = w_{\text{м}} + w_{\text{е}} = \frac{L \cdot i^2}{2} + \frac{C \cdot u_c^2}{2}, \quad (2.74)$$

де $i = I_m \cdot \sin \omega_0 t$. Миттєва напруга на ємності:

$$\begin{aligned} u_C &= U_{Cm} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{Cm} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\frac{I_m}{\omega_0 \cdot C} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= -\rho \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Миттєва значення загального запасу електромагнітної енергії в резонансному режимі – величина постійна:

$$w_{em} = \frac{L \cdot I_m^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) + \frac{L}{C} \cdot \frac{C}{2} \cdot I_m^2 \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{L \cdot I_m^2}{2} = \frac{C \cdot U_m^2}{2}. \quad (2.76)$$

Таким чином зменшення енергії електричного поля супроводжується збільшенням енергії магнітного поля і навпаки.

Частотні характеристики послідовного коливального контуру – це залежності різних параметрів контуру від частоти (рис.2.19):

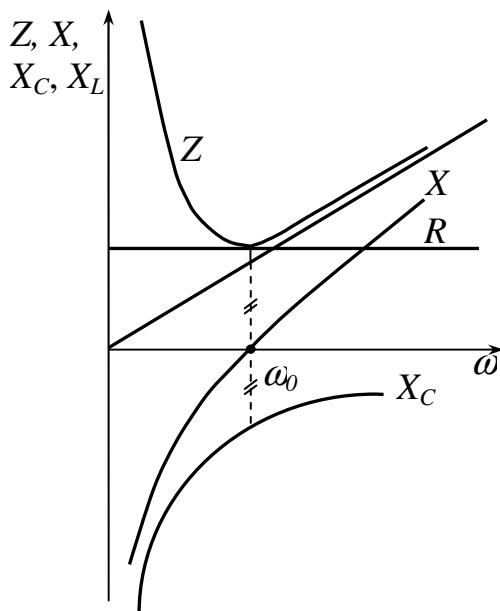
$$X_L = \omega \cdot L = f(\omega); \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = f(\omega); \quad X = X_L - X_C = f(\omega);$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = f(\omega); \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega); \quad U_L = I \cdot \omega \cdot L = \frac{U \cdot \omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega);$$

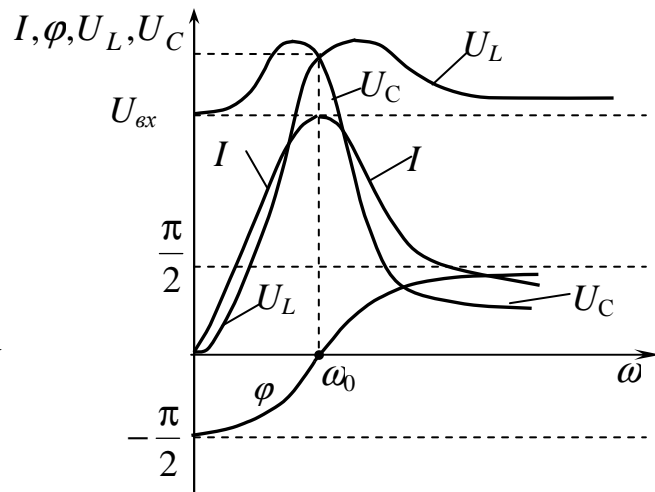
$$U_C = I \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{U}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega).$$

Фазочастотна характеристика – це залежність кута зсуву фаз від частоти:

$$\varphi = f(\omega) = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}. \quad (2.77)$$



а)



б)

Рисунок 2.20

2.16 Резонанс у паралельному коливальному контурі

Резонанс струмів – такий режим роботи кола, що містить паралельне з'єднання ємності й індуктивності, за якого вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм співпадає за фазою з напругою на вході кола. Під час резонансу струмів струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж в загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною, реактивна потужність дорівнює нулю:

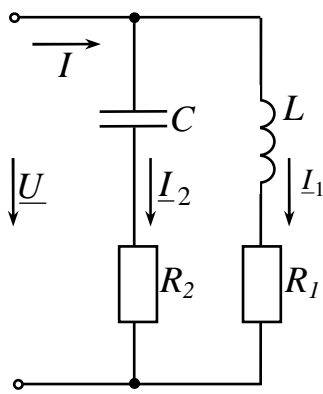


Рисунок 2.21

$B = B_L - B_C = 0$; $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Отримати резонанс струмів можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Розглянемо реальний паралельний коливальний контур (рис. 2.21), до якого прикладається синусоїдна напруга $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t)$. Знайдемо модулі струмів через провідності:

$$I = U \cdot Y, \quad I_1 = U \cdot Y_1, \quad I_2 = U \cdot Y_2, \quad (2.78)$$

$$\text{де } Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}; \quad Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}. \quad (2.79)$$

Активні провідності віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{R_2}{Z_2^2}. \quad (2.80)$$

$$\text{Повна активна провідність кола} - G = G_1 + G_2. \quad (2.81)$$

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{\omega \cdot L}{Z_1^2}; \quad (2.82)$$

$$B_2 = B_C = -\frac{1/\omega \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot Z_2^2}. \quad (2.83)$$

$$\text{Повна реактивна провідність кола } B = B_1 + B_2. \quad (2.84)$$

Під час резонансу $Y_o = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$ і тому загальний струм досягає мінімального значення – $I_o = U \cdot Y_o = U \cdot (G_1 + G_2)$. Знайдемо резонансну частоту ω_o з умови $B = 0 \Rightarrow B = B_L - B_C \Rightarrow$

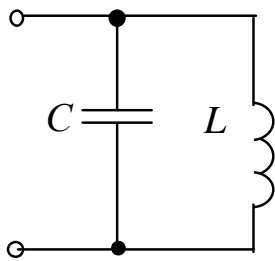
$$\frac{\omega_o \cdot L}{R_1^2 + (\omega_o \cdot L)^2} = \frac{1/\omega_o \cdot C}{R_2^2 + (1/\omega_o \cdot C)^2}. \quad (2.85)$$

Таким чином резонансна частота:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (2.86)$$

З останнього виразу бачимо, що резонанс є можливим в випадках:

- коли $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_1$ та $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_2$;
- коли $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_1$ та $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_2$;
- коли $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2 = \rho$ – резонанс можливий за будь-якої частоти, тому що вхідний опір має активний характер.



Якщо $R_1 \approx 0$ та $R_2 = 0$, то струм $I \rightarrow 0$, $Z_{\text{ex}} \rightarrow \infty$. Конттури, у яких R_1 та R_2 є малими в порівнянні з $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ звуться *конттурами з малими втратами* – рисунок 2.22; для таких контурів резонансна частота – $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$.

Рисунок 2.22

$$\text{Добротність контуру: } q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}. \quad (2.87)$$

$$\text{Хвильова провідність } \gamma: \gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (2.88)$$

Залежності струму I і кута зсуву фаз φ від кутової частоти ω для реального контуру (рис. 2.21), зображені на рисунку 2.23. а залежності параметрів B_L , B_C , B від кутової частоти ω для ідеального контуру (рис. 2.22) – на рисунку 2.24.

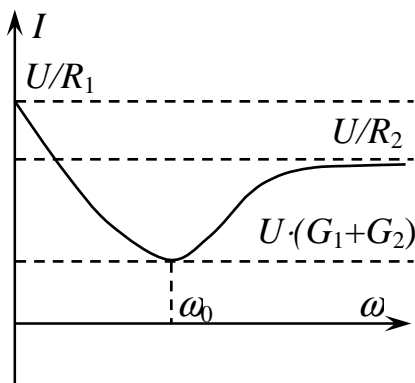
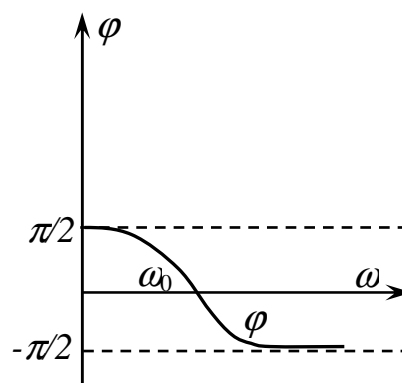
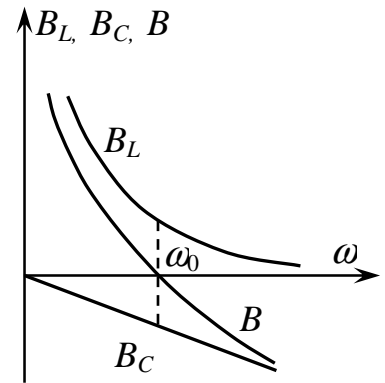


Рисунок 2.23



а)



б)

Рисунок 2.24

2.17 Складний резонансний коливальний контур

Складним резонансним коливальним контуром називають контур, в якому можуть виникнути як резонанс струмів, так і резонанс напруг (рис. 2.25).

З умов виникнення резонансу струмів і напруг випливає, що резонансними будуть частоти, що звертають вхідний реактивний опір X в нуль (тоді $B = \frac{1}{X} = \infty$), або вхідну реактивну провідність B в нуль (тоді $X = \frac{1}{B} = \infty$).

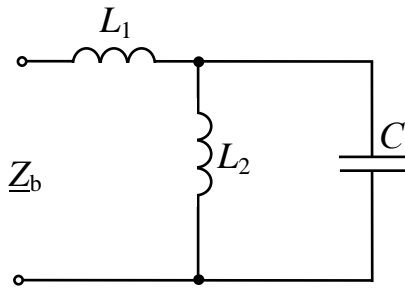


Рисунок 2.25

Вхідний опір для схеми рисунку 2.25:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= j \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \left(-j \frac{1}{\omega \cdot C} \right)}{j \cdot \omega \cdot L_2 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \\ &= j \cdot \left[\omega \cdot L_1 - \frac{\omega \cdot L_2 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}}{\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)} \right] = \\ &= j \cdot \left[\omega \cdot L_1 - \frac{\omega \cdot L_2}{\omega^2 \cdot L_2 \cdot C - 1} \right] = j \cdot X. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $X \rightarrow \infty$ коли $\omega^2 \cdot L_2 \cdot C - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\omega_p(I) = \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C}} \quad - \text{ частота резонансу струмів для схеми рисунку 2.25.} \quad (2.89)$$

З іншого боку, $X \rightarrow 0$ коли $\Rightarrow \omega^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot C - \omega \cdot L_1 - \omega \cdot L_2 = 0 \Rightarrow$

$$\omega^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot C} \Rightarrow \omega_p(U) = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot C}} \quad - \text{ частота резонансу напруг.} \quad (2.90)$$

Таким чином, електрична схема рисунку 2.25 має дві резонансні частоти – $\omega_p(I)$ та $\omega_p(U)$.

2.18 Практичне застосування резонансу

1. Підвищення коефіцієнта потужності (компенсація куту зсуву фаз).

Для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати найбільш високий коефіцієнт потужності $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I_H}$, тобто намагатися отримати менший зсув за фазою між струмом і напругою. Високий $\cos \varphi$ необхідний для зменшення втрат під час передачі енергії по лініях електропередач: якщо пі-

двигувати $\cos \varphi$, то струм, від якого залежить рівень втрат в проводах, можна зменшити: $\cos \varphi \uparrow \Rightarrow I_H = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi} \downarrow$.

На практиці це виконують так: конденсатор під'єднують паралельно до індуктивних елементів (наприклад, до асинхронних двигунів) – рисунок 2.25 (I_H – струм навантаження).

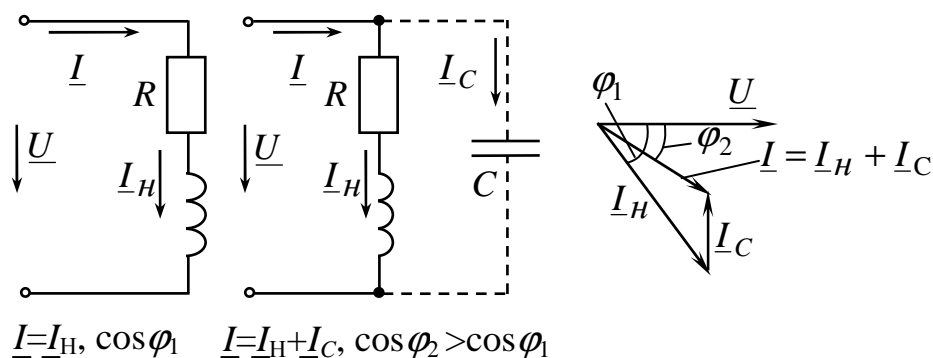


Рисунок 2.26

2. У передавачах та радіоприймальних пристроях (наприклад, налаштування радіоприймача на хвилю будь-якої станції означає досягнення резонансу його коливального контуру з частотою електромагнітних хвиль, що випромінює ця станція). У В провідниковому міжміському зв'язку.

4. В електровимірювальній техніці і пристроях автоматики.

5. У ферорезонансних стабілізаторах напруги.

Але якщо резонанс не передбачений спеціально, то він може визвати небажані наслідки – пробій ізоляції і пошкодження електротехнічних пристроїв.

2.19 Поняття падіння і втрати напруги в лініях передачі енергії

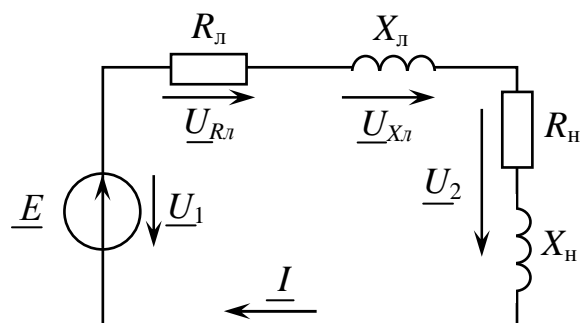


Рисунок 2.27

Лінія передачі має активний R_L і індуктивний X_L опори, навантаження також активно-індуктивне – $Z_H = R_H + j \cdot x_H$ (рис.2.27).

На рисунку 2.27 позначено:

$\underline{U}_1, \underline{U}_2$ – напруга на початку і наприкінці лінії;

$\underline{U}_{R_L} = \underline{I} \cdot R_L$ – падіння напруги в активному опорі лінії;

$\underline{U}_{L_L} = j \cdot X_L \cdot \underline{I}$ – падіння напруги в індуктивному опорі лінії.

Під *падінням напруги* розуміють модуль геометричній різниці векторів \underline{U}_1 та \underline{U}_2 .

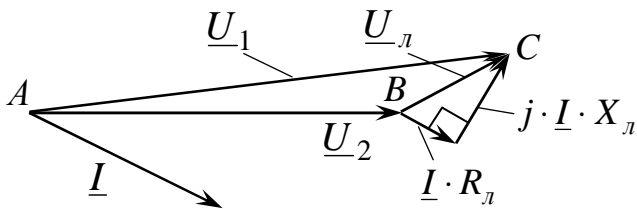


Рисунок 2.28

На векторній діаграмі (рис. 2.28) – це відрізок $[BC]$, довжина якого: $|BC| = I \cdot \sqrt{R_{\text{л}}^2 + X_{\text{л}}^2}$.

Втрата напруги дорівнює різниці модулів напруги на початку и

наприкінці лінії – $|\underline{U}_1| - |\underline{U}_2|$.

З діаграми (рис. 2.28) бачимо, що падіння напруги більше ніж втрати напруги.

Розділ 3 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

3.1 Основні поняття і класифікація

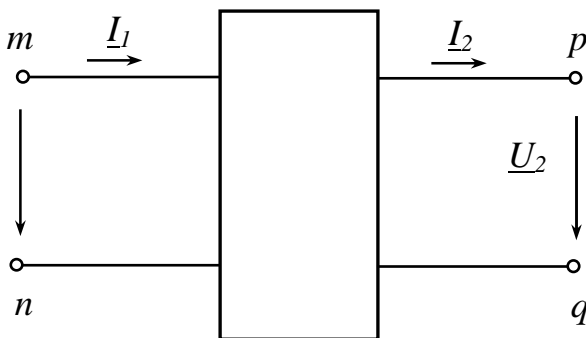


Рисунок 3.1

Чотириполіусник – електричне коло, що має два входних і два вихідних зажима (наприклад, трансформатор, мостова схема, і т. ін.). Поняття чотириполіусника використовують, коли треба визначити тільки входні й вихідні струми і напруги на вході й виході пристрою. Умовне позначення чотириполіусника наведено на рисунку 3.1, де позначено

m, n – входні зажимачі, до яких під'єднують джерело живлення;

p, q – вихідні зажимачі, до яких під'єднують навантаження;

$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_1, \underline{U}_1 \text{ – входні} \\ \underline{I}_2, \underline{U}_2 \text{ – вихідні} \end{array} \right\} \text{ струми і напруги.}$

Таким чином, чотириполіусник – передаточна ланка між джерелом живлення і навантаженням, які можуть змінюватися, але елементи чотириполіусника та схема їх внутрішнього з'єднання, залишаються незмінними.

Класифікація чотириполіусників:

- за принципом лінійності – лінійні й нелінійні;
- за схемою внутрішніх поєднань – Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис. 3.2);
- активні (мають у своєму складі хоча би одне джерело енергії) і пасивні (не мають у своєму складі джерел енергії);

- автономні і неавтономні (якщо автономний чотириполіусник відімкнути від решти схеми, то хоча би на одній парі затискачів існуватиме напруга);
- симетричний (зміна містами джерела живлення і навантаження не змінить струмів на вході й виході чотириполіусника) і несиметричний.

3.2 Основні рівняння чотириполіусника

Для будь-якого лінійного пасивного чотириполіусника існують основні рівняння, що пов'язують струм \underline{I}_1 і напругу \underline{U}_1 на вході із струмом \underline{I}_2 і напругою \underline{U}_2 на виході. Розглянемо так звану А-форму запису системи основних рівнянь чотириполіусника, для якої характерними є саме такі напрямки струмів і напруг, як показано на рисунку 3.1:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

де A, B, C, D – комплексні коефіцієнти, що залежать від значень елементів чотириполіусника, їх характеру, типу внутрішнього з'єднання, частоти та визначають розрахунком та експериментом.

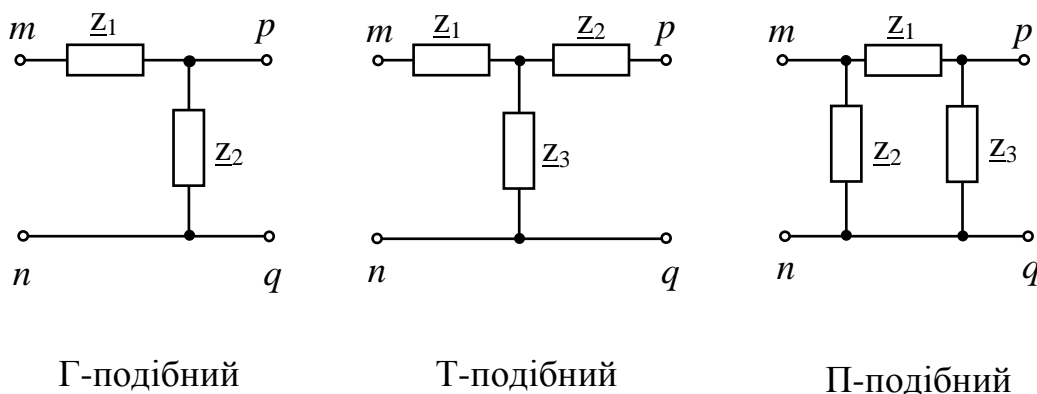


Рисунок 3.2

Коефіцієнти чотириполіусника зв'язані між собою співвідношенням:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1. \quad (3.2)$$

Доведемо, що рівняння (3.1) існують.

Відповідно до теореми про компенсацію можна замінити опір \underline{Z}_n із струмом \underline{I}_2 на ЕРС \underline{E}_2 , що дорівнює $\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_n$ і спрямована назустріч струму \underline{I}_2 (рис.3.3, а). Запишемо вирази для струмів \underline{I}_1 та \underline{I}_2 , використовуючи метод накладання та поняття входних і взаємних провідностей.

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{12}, \quad (3.3)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{21} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{22}. \quad (3.4)$$

де \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{22} – власні провідності вхідної і вихідної віток,

$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ – взаємні провідності вхідної (першої) і вихідної (другої) віток.

$$\text{З (3.4) виразимо } \underline{E}_1: \underline{E}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{1}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.5)$$

Підставимо отриманий вираз (3.5) в рівняння (3.3):

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.6)$$

Введемо позначення:

$$A = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}; \quad B = \frac{1}{\underline{Y}_{12}}; \quad C = \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}}; \quad D = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.7)$$

Розмірності коефіцієнтів: A і D – безрозмірні величини, C – [См], B – [Ом]. Для симетричного чотириполюсника – $A=D$.

З урахуванням введених позначень і того, що $\underline{U}_1 = \underline{E}_1$, $\underline{U}_2 = \underline{E}_2$ можна переписати рівняння (3.5) та (3.6) у вигляді:
$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2 \end{cases}$$

Підставимо вирази для коефіцієнтів A, B, C, D (3.7) в рівняння (3.2) та переконаємось у виконанні співвідношення (3.2):

$$A \cdot D - D \cdot C = \frac{\underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}^2} - \frac{\underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}^2} = 1. \quad (3.8)$$

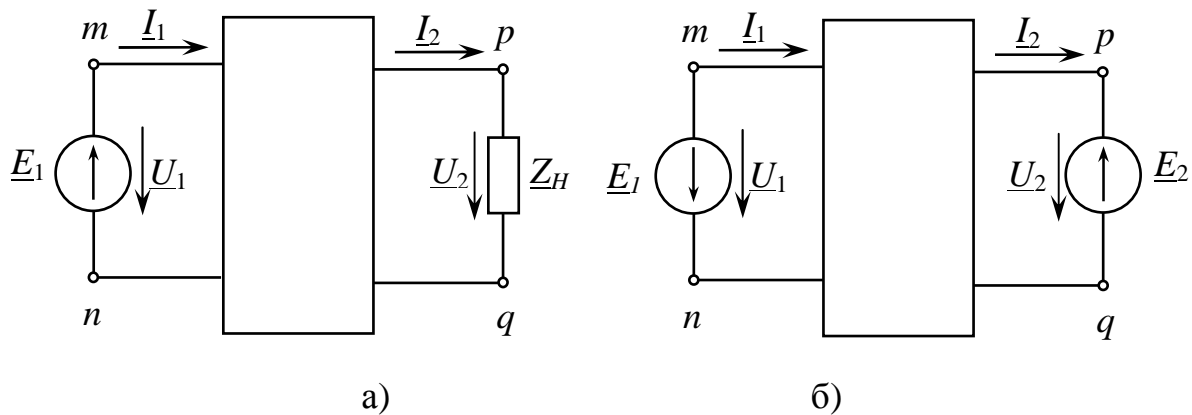


Рисунок 3.3

Якщо поміняти місцями \underline{E}_1 і \underline{Z}_H та зробити ті ж самі операції, то отримаємо систему основних рівнянь чотириполюсника, коли його живлення здійснюється з боку вихідних затискачів.

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1 \end{cases}. \quad (3.9)$$

Існують також інші форми запису рівнянь чотириполюсника – H , Y , Z , G , B . Наприклад, для Y – форми напрямок струму \underline{I}_1 такий же самий, як і для A -форми, а напрямок \underline{I}_2 – протилежний A -формі. Y – форма запису має вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = Y_{11} \cdot \underline{U}_1 + Y_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = Y_{21} \cdot \underline{U}_1 + Y_{22} \cdot \underline{U}_2, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{де } Y_{11} = \frac{D}{B}; Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B}; Y_{22} = \frac{A}{B}. \quad (3.11)$$

Таким чином, якщо з чотирьох величин \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{U}_1 , \underline{U}_2 дві величини є відомими, то інші визначаються з основних рівнянь чотириполюсника за умови відомих коефіцієнтів.

Форма A застосовується в теорії кругових діаграм, форми Y , Z – у теорії синтезу кіл, параметри схем заміщення транзисторів представляють в H -формі.

3.3 Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника

3.3.1 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника розрахунком

У цьому випадку повинні бути відомими схема з'єднання елементів і параметри цих елементів.

Отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів. Основні рівняння, як відомо, мають вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2 \end{cases}.$$

Припустимо, що струм $\underline{I}_2 = 0$ (режим неробочого ходу на виході).

$$\text{Тоді } \begin{cases} \underline{U}_{1нх} = A \cdot \underline{U}_{2нх} \\ \underline{I}_{1нх} = C \cdot \underline{U}_{2нх} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1нх}}{\underline{I}_{1нх}} = \frac{A}{C} = \underline{Z}_{1нх}, \quad (3.12)$$

де $\underline{Z}_{1нх}$ – вхідний опір чотириполюсника у режимі неробочого ходу на виході.

Припустимо, що напруга $\underline{U}_2 = 0$ (режим короткого замикання на виході).

$$\text{Тоді } \begin{cases} \underline{U}_{1кз} = B \cdot \underline{I}_{2кз} \\ \underline{I}_{1кз} = D \cdot \underline{I}_{2кз} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1кз}}{\underline{I}_{1кз}} = \frac{B}{D} = \underline{Z}_{1кз}, \quad (3.13)$$

де $\underline{Z}_{1кз}$ – вхідний опір чотириполюсника у режимі короткого замикання на виході.

Основні рівняння чотириполюсника, коли його живлення здійснюється з боку вихідних затискачів, як відомо, мають вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1 \end{cases}.$$

Припустимо, що на вході коротке замикання – $\underline{U}_1 = 0$.

$$\text{Тоді } \begin{cases} \underline{U}_{2\kappa 3} = B \cdot \underline{I}_{1\kappa 3} \\ \underline{I}_{2\kappa 3} = A \cdot \underline{I}_{1\kappa 3} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{2\kappa 3}}{\underline{I}_{2\kappa 3}} = \frac{B}{A} = \underline{Z}_{2\kappa 3}, \quad (3.14)$$

де $\underline{Z}_{2\kappa 3}$ – вихідний опір чотириполюсника у режимі короткого замикання на вході при живленні зі сторони виходу.

Виразимо усі коефіцієнти через коефіцієнт A :

$$C = \frac{A}{\underline{Z}_{1\text{нх}}}; \quad B = A \cdot \underline{Z}_{2\kappa 3}; \quad D = \frac{B}{\underline{Z}_{1\kappa 3}} = \frac{A \cdot \underline{Z}_{2\kappa 3}}{\underline{Z}_{1\kappa 3}}. \quad (3.15)$$

Скористаємося рівнянням (3.2), в яке підставимо рівняння (3.15):

$$A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2\kappa 3}}{\underline{Z}_{1\kappa 3}} - A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2\kappa 3}}{\underline{Z}_{1\text{нх}}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\kappa 3} \cdot \underline{Z}_{1\text{нх}}}{\underline{Z}_{2\kappa 3} \cdot (\underline{Z}_{1\text{нх}} - \underline{Z}_{1\kappa 3})}}. \quad (3.16)$$

Висновок: якщо відомі $\underline{Z}_{2\kappa 3}$, $\underline{Z}_{1\text{нх}}$, $\underline{Z}_{1\kappa 3}$, то за формулами (3.15), (3.16) знаходять усі коефіцієнти чотириполюсника.

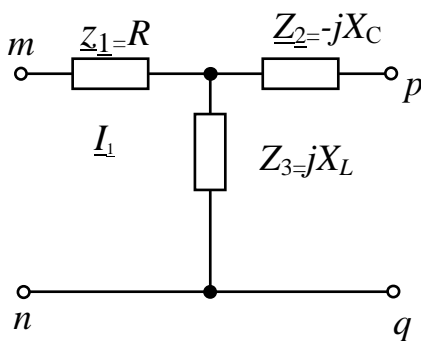


Рисунок 3.4

Розглянемо приклад.

Нехай у Т-подібного чотириполюсника (рис.3.4) відомі параметри його елементів:

$$R = 100 \text{ Ом}, \quad X_L = 200 \text{ Ом}, \quad X_C = 100 \text{ Ом}.$$

Визначимо коефіцієнти A , B , C , D .

1. Живлення з боку входу, режим неробочого ходу на виході:

$$\underline{Z}_{1\text{нх}} = R + j \cdot X_L = 100 + j \cdot 200 = 224 \angle 63,4^\circ \text{ Ом}.$$

2. Живлення з боку входу, коротке замикання на виході:

$$\underline{Z}_{1\kappa 3} = R + \frac{j \cdot X_L \cdot (-j \cdot X_C)}{j \cdot (X_L - X_C)} = 100 + \frac{20000}{j \cdot 100} = 100 - j \cdot 200 = 224 \angle -63,4^\circ \text{ Ом}.$$

3. Живлення з боку виходу, коротке замикання на вході:

$$\underline{Z}_{2\kappa 3} = -j \cdot X_C + \frac{R \cdot j \cdot X_L}{R + j \cdot X_L} = -j \cdot 100 + \frac{j \cdot 20000}{100 + j \cdot 200} = 77,3 - j \cdot 61,3 = 98,6 \angle -38,4^\circ \text{ Ом}.$$

4. За формулами (3.15), (3.16) визначаємо коефіцієнти:

$$A = \sqrt{\frac{224 \angle -63,4^\circ \cdot 224 \angle 63,4^\circ}{98,6 \angle -38,4^\circ \cdot (224 \angle 63,4^\circ - 224 \angle -63,4^\circ)}} = 1,128 \angle -25,8^\circ;$$

$$B = A \cdot \underline{Z}_{2\kappa 3} = 1,128 \angle -25,8^\circ \cdot 98,6 \angle -38,4^\circ = 111,22 \angle -64,2^\circ \text{ Ом};$$

$$C = A / \underline{Z}_{1нх} = \frac{1,128 \angle -25,8^\circ}{224 \angle 63,4^\circ} = 0,005 \angle -89,2^\circ \text{ См};$$

$$D = B / \underline{Z}_{1кз} = \frac{111,22 \angle -64,2^\circ}{224 \angle -63,4^\circ} = 0,5 \angle -0,8^\circ \text{ См}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} A \cdot D - B \cdot C &= 1,128 \angle -25,8^\circ \cdot 0,5 \angle -0,8^\circ - 111,22 \angle -64,2^\circ \cdot 0,005 \angle -89,2^\circ = \\ &= 0,564 \angle -26,4^\circ - 0,5561 \angle -153,4^\circ = 0,505 - j \cdot 0,25 + 0,5 + j \cdot 0,249 \approx 1. \end{aligned}$$

3.3.2 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника експериментальним шляхом

Схема для експериментального визначення коефіцієнтів зображена на рисунку 3.5. Етапи визначення коефіцієнтів наступні.

1. *Режим неробочого ходу* (живлення з боку входу чотириполюсника):

- модуль опору $Z_{1нх} = \frac{U_{1нх}}{I_{1нх}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1};$

- модуль кута зсуву фаз $\varphi_{1нх}$:

$$\varphi_{1нх} = \arccos \frac{P_{1нх}}{U_{1нх} \cdot I_{1нх}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_1}{(\text{показання амперметра } A_1) \cdot (\text{показання вольтметра } V_1)};$$

2. *Режим короткого замикання* (живлення зі сторони входу):

- модуль опору $Z_{1кз} = \frac{U_{1кз}}{I_{1кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1};$

- модуль кута зсуву фаз $\varphi_{1кз}$:

$$\varphi_{1кз} = \arccos \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} \cdot I_{1кз}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_1}{(\text{показання амперметра } A_1) \cdot (\text{показання вольтметра } V_1)}.$$

3. *Режим короткого замикання на виході* (живлення зі сторони виходу, при проведенні цього дослідів ватметр W_2 треба ввімкнути в вихідне коло):

- модуль опору $Z_{2кз} = \frac{U_{2кз}}{I_{2кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_2}{\text{показання амперметра } A_2};$

- модуль кута зсуву фаз $\varphi_{2кз}$:

$$\varphi_{2кз} = \arccos \frac{P_{2кз}}{U_{2кз} \cdot I_{2кз}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_2}{(\text{показання амперметра } A_2) \cdot (\text{показання вольтметра } V_2)}.$$

4. Для визначення знаків кутів $\varphi_{1нх}$, $\varphi_{1кз}$, $\varphi_{2кз}$ за допомогою ланцюга “ключ – конденсатор” виконують наступні дії:

- якщо при замиканні ключа K показання амперметра A_1 зменшиться, то це

означає, що характер кола активно-індуктивним, а кут має знак “+”;

- якщо при замиканні ключа K показання амперметра A_1 збільшиться, то це

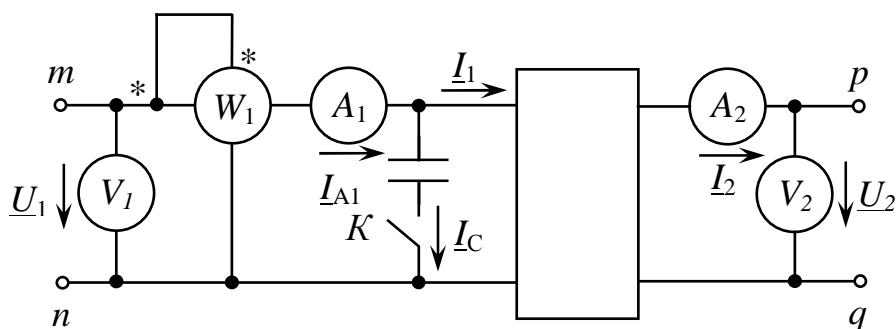


Рисунок 3.5

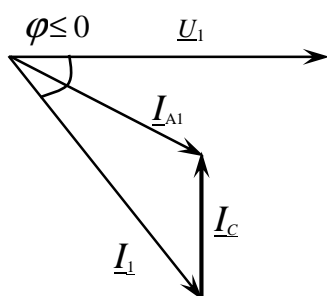
означає, що характер кола активно-ємнісним, а кут має знак “-”.

Суть досліду ілюструють векторні діаграми (рис. 3.6):

- ключ K незамкнутий: $I_{A1} = I_1$;

- ключ K замкнутий: $I_{A1} = I_1 + I_C$.

R - L опір, $I_{A1} \leq I_1$



R - C опір, $I_{A1} \geq I_1$

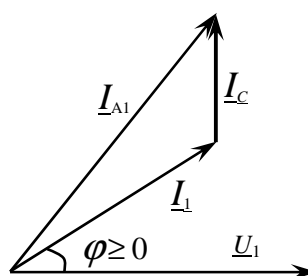


Рисунок 3.6

3.4 Схеми заміщення пасивного чотириполюсника

Будь-який складний чотириполюсник можна замінити більш простішим

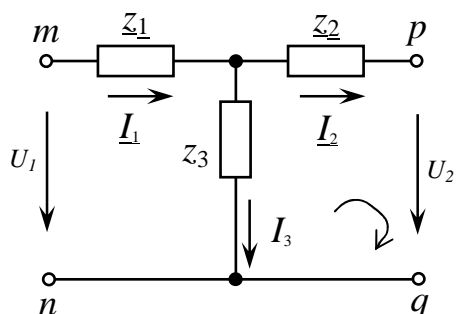


Рисунок 3.7

(Т-, П-подібними) і за цієї заміни три опори схеми Z_1, Z_2, Z_3 повинні бути розраховані таким чином, щоб схема заміщення давала б такі самі коефіцієнти (A, B, C, D), що й вихідний чотириполюсник.

Нехай деякий складний чотириполюсник з коефіцієнтами A, B, C, D замінили Т-подібним чотириполюсником (рис. 3.7).

Знайдемо, якими саме мають бути опори $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, щоб коефіцієнти A, B, C, D залишались незмінними. Рівняння за першим і другим законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_3} \cdot \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{I}_2. \quad (3.18)$$

Порівняємо друге рівняння системи (3.1) з рівнянням (3.18). Зрозуміло, що

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_3}, D = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \quad (3.19)$$

Для зовнішнього контуру:

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0, \quad (3.20)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2. \quad (3.21)$$

Підставимо рівняння (3.18) в (3.21):

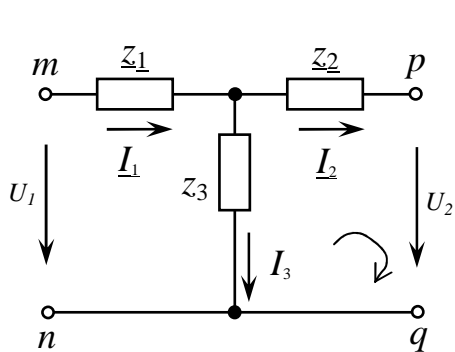


Рисунок 3.8

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2.$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) + \underline{I}_2 \cdot \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right).$$

Порівняємо перше рівняння системи (3.1) з рівнянням (3.23). Зрозуміло, що

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}, \quad B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \quad (3.24)$$

Таким чином, з (3.19) та (3.24):

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{C}, \quad \underline{Z}_1 = \frac{A-1}{C}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{D-1}{C}. \quad (3.25)$$

Формули (3.25) використовують для розрахунку $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, коли відомі коефіцієнти чотирьохполосника.

3.5 Годографи (кругові й лінійні діаграми)

Багато практичних задач потребують дослідження залежності кола від різних факторів. Поряд з аналітичними методами використовують і графічні, тобто побудову годографів (діаграм). *Годограф* – геометричне місце кінців векторів, що зображують різні величини. Годографи можуть мати форму дуги кола – тоді вони називаються *круговими* діаграмами, або форму лінії – тоді це *лінійні* діаграми.

3.5.1 Лінійні діаграми

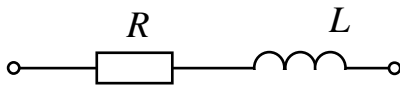
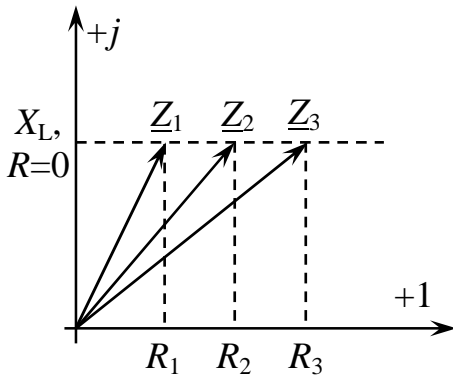


Рисунок 3.9

Розглянемо ділянку кола рисунок 3.8.

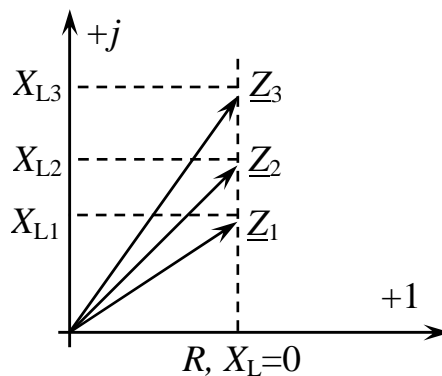
Побудуємо геометричне місце кінців вектора, що зображує комплексний опір цієї ділянки $\underline{Z} = R + j \cdot X_L$ при зміні: а) $0 \leq R \leq \infty$;

б) $0 \leq X_L \leq \infty$.



$0 \leq R \leq \infty$

а)



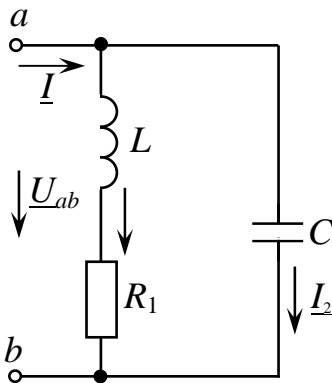
$0 \leq X_L \leq \infty$

б)

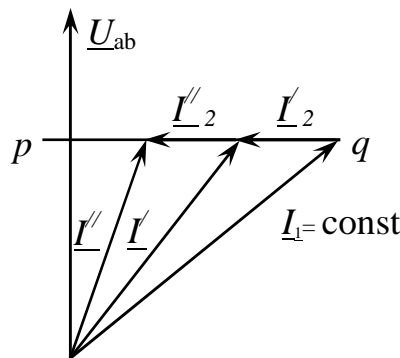
Рисунок 3.10

осі уявних чисел і проходить через точку з координатами $(R; 0)$ (рис. 3.9, б).

Розглянемо інший приклад побудови лінійної діаграми для струму $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ (схема рис. 3.10) за умов $U_{ab} = \text{const}$; $R, X_L = \text{const}$; $X_C = \text{var}$.



а)



б)

Рисунок 3.11

Струм \underline{I}_1 відстає від \underline{U}_{ab} на кут φ .
 $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$.

Струм \underline{I}_2 випереджає \underline{U}_{ab} на кут 90° . Годограф у цьому випадку – лінія pq .

Висновок: часто деяка комплексна величина визначається рівнянням

виду $\underline{N} = \underline{A} + \underline{B}$, де $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha} = \text{const}$, $\underline{B} = B \cdot e^{j\beta}$ – змінна комплексна величина, в якій $\beta = \text{const}$, а $0 \leq B \leq \infty$ (α, β – кути комплексних величин \underline{A} та \underline{B} відносно осі дійсних чисел). Тобто, на комплексній площині вектор \vec{N} є сумою двох век-

торів \vec{A} та \vec{B} , один з яких (\vec{A}) незмінний, а в іншого (\vec{B}) – незмінний напрям і змінна довжина: $\vec{N} = \vec{A} + \vec{B}$, де $\vec{A} = const$, $0 \leq |\vec{B}| \leq \infty$, $\beta = const$.

Тоді рівняння $\underline{N} = \underline{A} + \underline{B}$ на комплексній площині є рівнянням прямої, що проходить під кутом β до осі дійсних чисел через кінець вектора \vec{A} .

3.5.2 Кругові діаграми

Розглянемо провідність ділянки кола (рис. 3.8): $\underline{Y} = \frac{1}{R + j \cdot X_L}$, коли

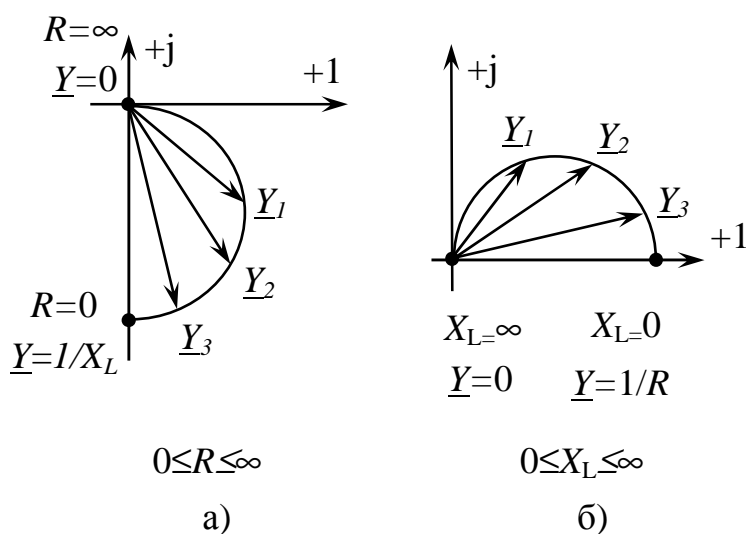


Рисунок 3.12

а) $0 \leq R \leq \infty$, $X_L = const$;

б) $0 \leq X_L \leq \infty$, $R = const$.

Годографом у випадку а) є дуга кола, що проходить через початок координат (рис. 3.11,а). Годографом у випадку б) є дуга кола, що також проходить через початок координат (рис. 3.11,б).

Висновок: величина, зворотна лінійної функції $\vec{N} = \vec{A} + \vec{B}$, на комплексній

площині представляє рівняння дуги кола, що проходить через початок координат:

$$\vec{W} = \frac{1}{\vec{N}} = \frac{1}{\vec{A} + \vec{B}} = \frac{1/\vec{A}}{1 + \frac{\vec{B}}{\vec{A}}} = \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}}, \quad (3.26)$$

$$\text{де } \vec{C} = \frac{1}{\vec{A}}; \quad \vec{B} = B \cdot e^{j \cdot \beta}; \quad \vec{A} = A \cdot e^{j \cdot \alpha};$$

$$\frac{\vec{B}}{\vec{A}} = \frac{B}{A} \cdot e^{j \cdot (\beta - \alpha)} = K \cdot e^{j \cdot \delta}.$$

Таким чином:

$$\vec{W} = \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}} - \text{основне рівняння дуги кола, що проходить через початок координат на комплексній площині}; \quad (3.27)$$

$$\vec{W} = \vec{W}_L + \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}} - \text{основне рівняння дуги кола, що не проходить.} \quad (3.28)$$

3.5.3 Кругова діаграма струму для двох послідовно поєднаних опорів

Розглянемо схему на рисунку 3.12, для якій $\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = \text{const}$, $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$, де $Z = \text{var}$, $\varphi = \text{const}$.

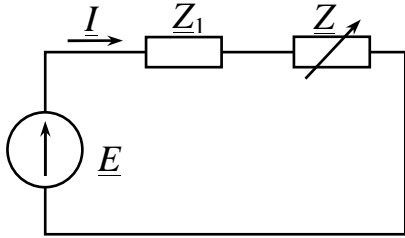


Рисунок 3.13

Доведемо, що струм \underline{I} буде мати кругову діаграму:
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}} = \frac{\underline{E} / \underline{Z}_1}{1 + \underline{Z} / \underline{Z}_1} \quad (3.29)$$

Позначимо $\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} = \underline{I}_{\text{кз}}$, (3.30)

а також врахуємо, що

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_1} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j(\varphi - \varphi_1)} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j\delta}, \quad (3.31)$$

$$\text{де } \delta = \varphi - \varphi_1. \quad (3.32)$$

$$\text{Таким чином } \underline{I} = \frac{\underline{I}_{\text{кз}}}{1 + \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j\delta}}. \quad (3.33)$$

Якщо порівняти (3.33) з (3.28), то зрозуміло, що це – рівняння дуги кола, що проходить через початок координат на комплексній площині.

Розділ 4 ТРИФАЗНІ КОЛА

4.1 Основні поняття і визначення

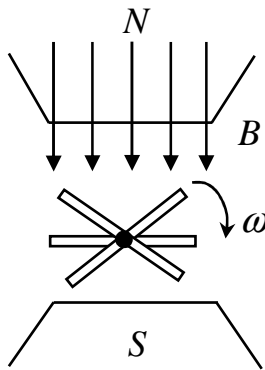


Рисунок 4.1

Сукупність електричних кіл, в яких діють створені спільним джерелом синусоїдні електрорушійні сили (ЕРС) однакової частоти й амплітуди, але які відрізняються один від одного за фазою на кут $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ (m – кількість фаз) – це багатофазні симетричні системи. Багатофазні системи бувають дво-, три-, чотири-, шести-, дванадцятифазними.

Трифазна симетрична система ЕРС – сукупність трьох синусоїдних ЕРС одної частоти, що мають однакові амплітуди та зсунуті між собою за фазою на 120° . Принцип отримання трифазної системи ЕРС: в рівномірному магнітному полі з постійною кутовою швидкістю ω обертаються 3 однакові жорстко скріплені одна з одною котушки. Площини котушок зміщені у просторі одна відносно іншої на кут 120° . В кожній котушці наводяться ЕРС однакової частоти і амплітуди, зсунуті за кутом на 120° одна відносно іншої (рис. 4.1).

Графік миттєвих значень ЕРС e_A , e_B , e_C зображений на рисунку 4.2, а векторні діаграми – на рисунку 4.3.

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює “ -120° ”, а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює “ $+120^\circ$ ”, називається *прямим*. Миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega \cdot t; e_B = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 120^\circ); e_C = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ) \quad (4.1)$$

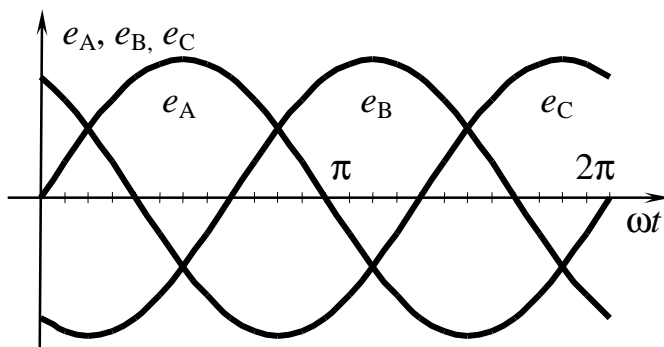


Рисунок 4.2

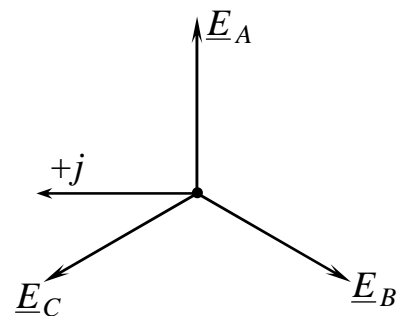


Рисунок 4.3

Трифазне коло – сукупність трифазної система ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень та з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Переваги трифазних систем в порівнянні з іншими багатофазними системами:

1) передача енергії на великі відстані трифазним струмом більш економічна з точки зору економії металу;

2) елементи трифазної системи, такі як асинхронний двигун, трифазний генератор і трансформатор є простими у виробництві, економічні, надійні в роботі (усі ланки трифазного кола були розроблені російським вченим М.О. Доливо-Добровольским);

3) система має властивості незмінності величини миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження в усіх трьох фазах однакове.

Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування “початок” і “кінець”. Початки позначають буквами А, В, С, а кінці - х, у, z.

4.2 Основні схеми з'єднання трифазних кіл.

Визначення лінійних і фазних величин

Основні схеми з'єднання у трифазних колах - це схеми з'єднання зіркою і трикутником.

4.2.1 З'єднання обмоток генератора зіркою

Якщо всі "кінці" (або всі "початки") фазних обмоток з'єднані в один вузол – таке з'єднання називається *зіркою* (рис.4.4). Цю загальну точку називають нейтральною чи, якщо вона заземлена, нульовою.

Проводи, що з'єднують обмотки генератора або трансформатора з навантаженням, називаються *лінійними*, а провід, що з'єднує нейтральні або нульові точки генератора і навантаження, відповідно *нейтральним* або *нульовим*.

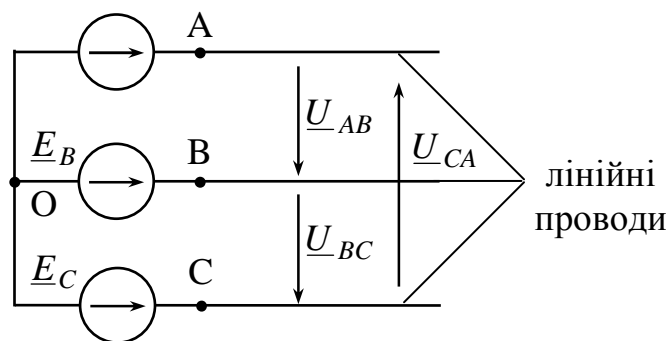


Рисунок 4.4

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора, тобто $\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$ (або на фазних навантаженнях \underline{U}_{AO_1} , \underline{U}_{BO_1} , \underline{U}_{CO_1} – рис. 4.7) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці потенціалів точок А, В, С або, що те ж саме, різниці фазних напруг:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}. \quad (4.2)$$

Розглянемо, яке співвідношення існує між фазними й лінійними напругами.

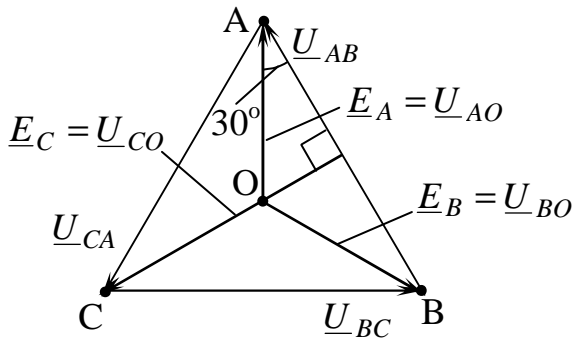


Рисунок 4.5

Відповідно до виразів (4.2) побудуємо векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис. 4.5), з якої видно, що при прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні й випереджають їх на 30° , тобто співвідношення між комплексами лінійних та фазних напруг мають вигляд:

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j30^\circ}. \quad (4.3)$$

4.2.2 З'єднання обмоток генератора трикутником

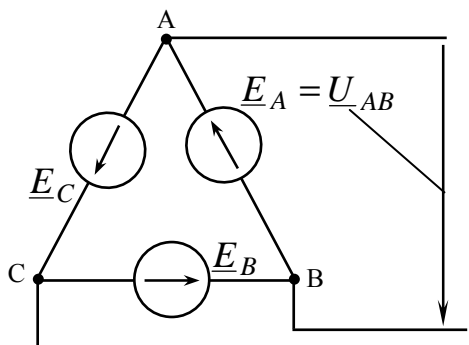


Рисунок 4.6

При з'єднанні в трикутник фазні обмотки генератора, трансформатора або навантаження з'єднані один з одним послідовно таким чином, що "початок" однієї фази генератора (або навантаження) з'єднується з "кінцем" іншої фази (рис. 4.6), а кожна фаза навантаження вмикається між лінійними проводами, внаслідок чого вона знаходиться під лінійною напругою, але лінійна напруга одночасно є і фазною напругою,

тобто: $\underline{U}_\Delta = \underline{U}_\Phi$.

Якщо до затисків генератора не під'єднане навантаження, то по обмотках не протікатиме струм, тому що:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{-j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Покажемо це:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{-j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = E \cdot (1 - 0,5 - j \cdot 0,866 - 0,5 + j \cdot 0,866) = 0$$

4.2.3 З'єднання обмоток генератора та трифазного навантаження за типом "зірка-зірка"

При з'єднанні "зірка-зірка" обмотки генератора й фазні навантаження поєднуються зіркою. Таке трифазне коло може бути без нульового проводу (трипровідна система – рис. 4.7)) або з ним (чотирипровідна система – рис. 4.8).

Проводи, що з'єднують генератор та навантаження, називають лінійними, струми, що течуть по них – лінійні струми (\underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C), а напруга між лінійними проводами – лінійна напруга (\underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA}). Для схем рисунку 4.7 і рисунку 4.8 фазні струми, що течуть по променях зірки, дорівнюють лінійним. Струм, що тече по нейтральному проводу (рис. 4.8) – струм нейтрального або нульового проводу (\underline{I}_N).

За додатний напрямок струмів у лінійних проводах приймається напрямок від джерела до навантаження, а в нейтральному проводі навпаки – від навантаження до джерела.

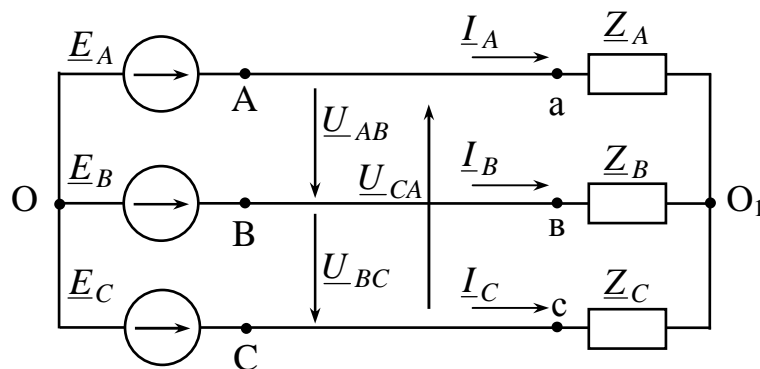


Рисунок 4.7

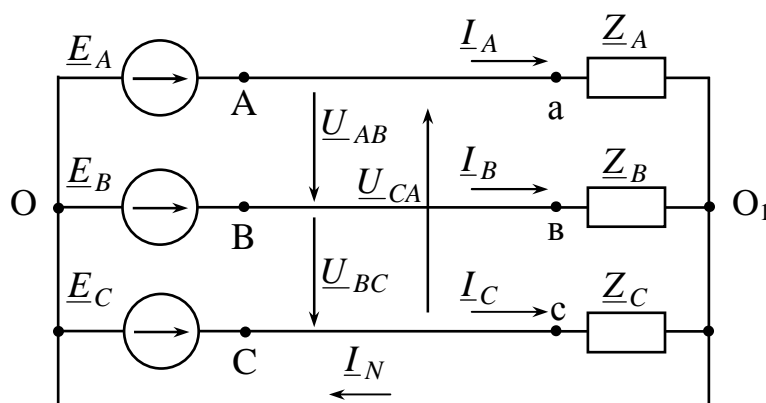


Рисунок 4.8

Струм у нейтральному проводі дорівнює геометричній сумі лінійних струмів (за першим законом Кірхгофа): $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$. (4.5)

4.2.4 З'єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом "трикутник-трикутник", "зірка-трикутник"

Схема "трикутник-трикутник" характеризується тим, що обмотки генератора і фазні навантаження з'єднані трикутником (рис. 4.9), а схема "зірка-трикутник" – тим, що обмотки генератора з'єднані зіркою, а фазні навантаження – трикутником (рис. 4.10).

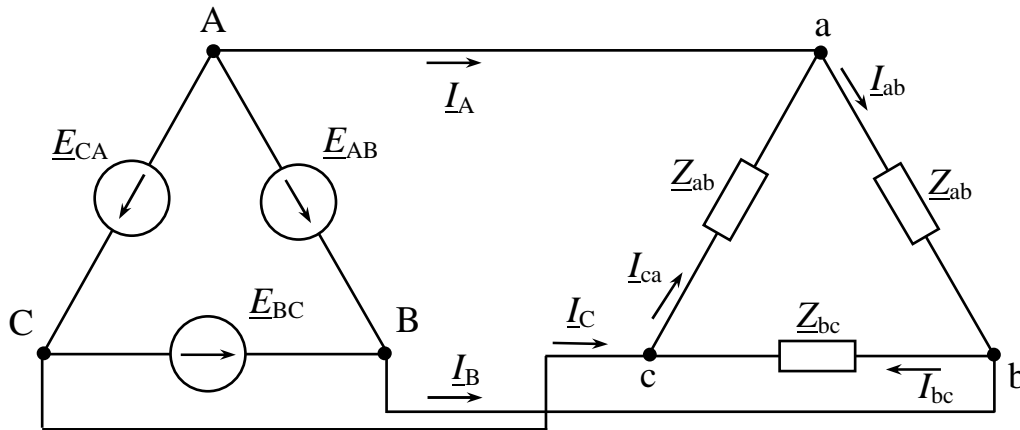


Рисунок 4.9

За позитивний напрямок лінійних струмів ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) приймається напрямок від джерела до навантаження. Позитивний напрямок фазних струмів вибирають від точки "a" до "b" (струм \underline{I}_{ab}), від точки "b" до "c" (струм \underline{I}_{bc}), від точки "c" до "a" (струм \underline{I}_{ca}).

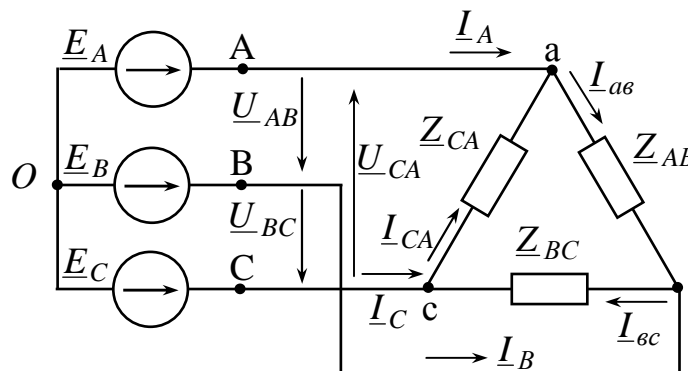


Рисунок 4.10 – Схема з'єднання "зірка-трикутник"

4.3 Розрахунок трифазних кіл

Трифазне коло є різновидом кіл синусоїдного струму і тому його розрахунок та дослідження здійснюють з використанням законів Ома і Кірхгофа та методів розрахунку, що розглядалися раніш. Особливо доцільним є застосування методу двох вузлів для аналізу схем «зірка-зірка». Вважаємо, що трифазна ЕРС симетрична.

4.3.1 Коло “зірка-зірка” з нульовим проводом

В схемі “зірка-зірка” з нульовим проводом за несиметричного навантаження ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$), коли в нейтральному проводі є опір \underline{Z}_N (рис.4.11), потенціали точок O і O_1 не дорівнюють один одному. Розрахунок кола здійснюють у такій послідовності:

- визначають напругу зміщення нейтралі (тобто напругу \underline{U}_{O_1O}) за виразом, що

$$\text{випливає з методу двох вузлів} - \underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (4.6)$$

$$\text{де } \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}, \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N} - \text{комплексні фазних провідностей і провідність нейтрального проводу;}$$

- визначають фазні напруги на навантаженні –

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (4.7)$$

- визначають фазні струми –

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \underline{I}_B = \underline{U}_{bO_1} \cdot \underline{Y}_B; \underline{I}_C = \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C; \quad (4.8)$$

- струм у нейтральному проводі \underline{I}_N визначають як суму фазних струмів за формулою (4.5).

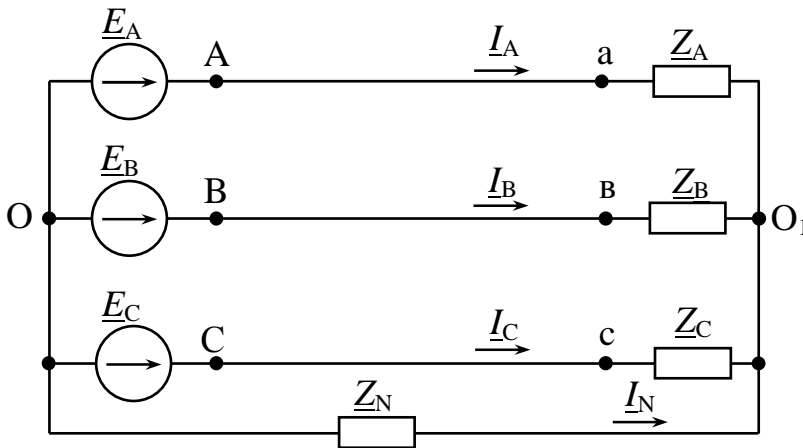


Рисунок 4.11

Коли в нейтральному проводі немає опору \underline{Z}_N (рис. 4.8), то напруга зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = 0$, і фазні струми визначають за формулами (4.8), а струм нейтрального проводу – за формулою (4.5).

За симетричного навантаження ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) в

випадках, що відповідають схемам рисунку 4.8 та рисунку 4.11, потенціали точок O і O_1 дорівнюють один одному. Для схеми рисунку 4.8 $\underline{U}_{O_1O} = 0$, тому що нейтральний провід вирівнює потенціали точок O та O_1 , а для схеми

$$\text{рисунку 4.11} - \underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot \left(\overbrace{\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C}^0 \right)}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0. \quad (4.9)$$

Тому фазні (лінійні) струми, які за законом Ома визначають за формулами (4.8), дорівнюють один одному за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° .

4.3.2 Коло “зірка-зірка” без нульового проводу

За симетричного навантаження ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) для схеми рисунку 4.7:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A} = \frac{\underline{Y}_A \cdot 0}{3 \cdot \underline{Y}_A} = 0. \quad (4.10)$$

Тоді фазні струми визначають за виразами (4.8) (з урахуванням того, що $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$), вони однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° .

Якщо для тієї ж схеми навантаження несиметричне ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$), фазні струми встановлюються таким чином, що їх сума дорівнює нулю. Внаслідок чого відбувається, як і в випадку несиметричного навантаження за наявності в нейтральному проводі опора \underline{Z}_N , викривлення симетрії фазних напруг так, що навантаження опиняються під різними, не рівними один одному (та фазним ЕРС) напругами. Потенціали точок О та O_1 не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють так:

- визначають напругу $\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}$; (4.11)
- визначають фазні напруги на навантаженні за формулами (4.7);
- визначають фазні струми за формулами (4.8).

4.3.3 Кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник”

Взагалі розрахунок кіл “трикутник-трикутник” (рис.4.9) і “зірка-трикутник” (рис. 4.10) відрізняються тільки величинами напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{\text{ф. навантаження}}$): у випадку кола “трикутник-трикутник” – $\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{ф. генератора}}$, а у випадку кола “зірка-трикутник” – $\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{лінійне генератора}} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{\text{ф}} \cdot \angle 30^\circ$.

Розглянемо розрахунок кола “зірка-трикутник” без урахування опорів проводів, що з'єднують трифазне джерело і навантаження:

- комплекси фазних струмів визначають за формулами:

$$\underline{I}_{\text{ав}} = \frac{\underline{U}_{\text{AB}}}{\underline{Z}_{\text{ав}}} = \underline{U}_{\text{AB}} \cdot \underline{Y}_{\text{ав}}; \quad \underline{I}_{\text{вс}} = \frac{\underline{U}_{\text{BC}}}{\underline{Z}_{\text{вс}}} = \underline{U}_{\text{BC}} \cdot \underline{Y}_{\text{вс}}; \quad \underline{I}_{\text{са}} = \frac{\underline{U}_{\text{CA}}}{\underline{Z}_{\text{са}}} = \underline{U}_{\text{CA}} \cdot \underline{Y}_{\text{са}}, \quad (4.12)$$

де $\underline{U}_{\text{AB}}, \underline{U}_{\text{BC}}, \underline{U}_{\text{CA}}$ – лінійні напруги (формули 4.3);

$$\underline{Y}_{ав} = \frac{1}{\underline{Z}_{ав}}; \underline{Y}_{вс} = \frac{1}{\underline{Z}_{вс}}; \underline{Y}_{са} = \frac{1}{\underline{Z}_{са}} \text{ – комплекси фазних провідностей.}$$

- лінійні струми визначають за першим законом Кірхгофа для вузлів а, в, с:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ав} - \underline{I}_{са}; \underline{I}_B = \underline{I}_{вс} - \underline{I}_{ав}; \underline{I}_C = \underline{I}_{са} - \underline{I}_{вс} . \quad (4.13)$$

Треба відзначити, що при симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням $\varphi = \arctg \frac{X_\phi}{R_\phi}$,

$$\quad (4.14)$$

де X_ϕ – реактивний опір навантаження;

R_ϕ – активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть рівними між собою, в $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30° при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_A = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ав} \angle -30^\circ; \underline{I}_B = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{вс} \angle -30^\circ; \underline{I}_C = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{са} \angle -30^\circ . \quad (4.15)$$

При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми.

Розглянемо розрахунок кола “зірка-трикутник” з урахуванням опорів проводів, що з’єднують трифазне джерело і навантаження, коли опори в лініях не дорівнюють один одному ($\underline{Z}_{ла} \neq \underline{Z}_{лв} \neq \underline{Z}_{лс}$) і навантаження фаз несиметричне (рис. 4.12).

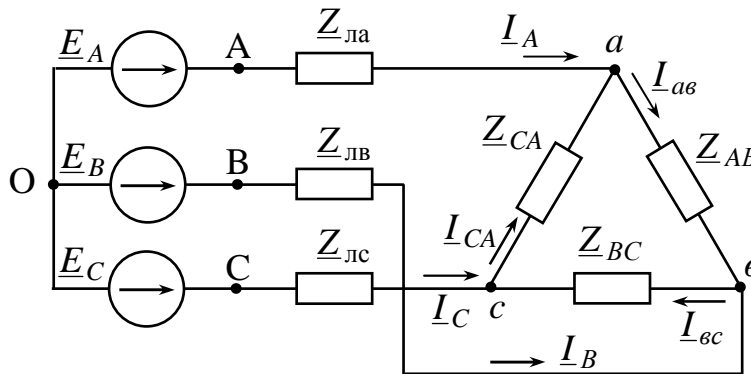


Рисунок 4.12

Розрахунок такої схеми слід виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою.

Опори еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}'_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \cdot \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad (4.16)$$

$$\underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}.$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi$, то опори еквівалентної зірки: $\underline{Z}'_a = \underline{Z}'_b = \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_\phi}{3}$. (4.17)

У результаті перетворення одержуємо еквівалентну схему, зображену на рисунку 4.13, лінійні струми якої ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) в загальному випадку розраховується як у схемі "зірка-зірка" при несиметричному навантаженні, а саме:

- визначають опори ($\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$) та провідності ($\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$) кожної фази, враховуючи що опори з'єднувальних проводів ввімкнені послідовно з відповідними опорами еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}'_a + \underline{Z}_{ла}; \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}; \underline{Z}_B = \underline{Z}'_b + \underline{Z}_{лв}; \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}'_c + \underline{Z}_{лс}; \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}. \quad (4.18)$$

- визначають напругу зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}$;
- визначають лінійні струми $\underline{I}_A = (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_A$, $\underline{I}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_B$,

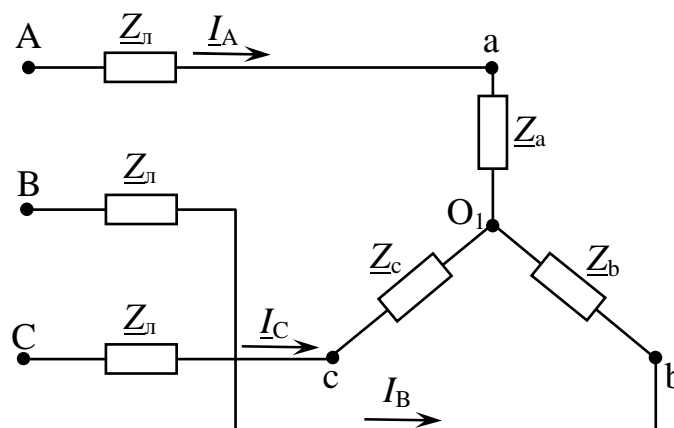


Рисунок 4.13

$$\underline{I}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_C.$$

Фазні струми в навантаженнях $\underline{Z}_{ab}; \underline{Z}_{bc}; \underline{Z}_{ca}$ вихідної схеми (рис.4.12) визначають за законом Ома.

$$\underline{I}_{\text{aB}} = \frac{\underline{U}_{\text{aB}}}{\underline{Z}_{\text{aB}}}; \underline{I}_{\text{bC}} = \frac{\underline{U}_{\text{bC}}}{\underline{Z}_{\text{bC}}}; \underline{I}_{\text{cA}} = \frac{\underline{U}_{\text{cA}}}{\underline{Z}_{\text{cA}}}, \quad (4.19)$$

де $\underline{U}_{\text{aB}}; \underline{U}_{\text{bC}}; \underline{U}_{\text{cA}}$ – лінійні напруги на навантаженні:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\text{aB}} &= \underline{U}_{\text{aO}_1} - \underline{U}_{\text{bO}_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_A - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B; \\ \underline{U}_{\text{bC}} &= \underline{U}_{\text{bO}_1} - \underline{U}_{\text{cO}_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_C; \\ \underline{U}_{\text{cA}} &= \underline{U}_{\text{cO}_1} - \underline{U}_{\text{aO}_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_C - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_A. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.4 Аварійні режими в трифазних колах

4.4.1 Схема "зірка-зірка"

У випадку обриву лінійного проводу в схемі з нейтральним проводом (рис. 4.14) $\underline{I}_A = 0$, а фазні струми $\underline{I}_B, \underline{I}_C$ залишаються тими ж, що й до аварій-

ного режиму тобто: $\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{\text{bO}_1}}{\underline{Z}_B}, \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{\text{cO}_1}}{\underline{Z}_C}.$ (4.21)

Струм в нульовому проводі: $\underline{I}_N = \underline{I}_B + \underline{I}_C.$ (4.22)

Фазні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{\text{aO}_1} = 0, \underline{U}_{\text{bO}_1} = \underline{U}_{\text{BO}}, \underline{U}_{\text{cO}_1} = \underline{U}_{\text{CO}}. \quad (4.23)$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює фазній напрузі: $\underline{U}_{\text{Aa}} = \underline{U}_{\text{AO}}.$

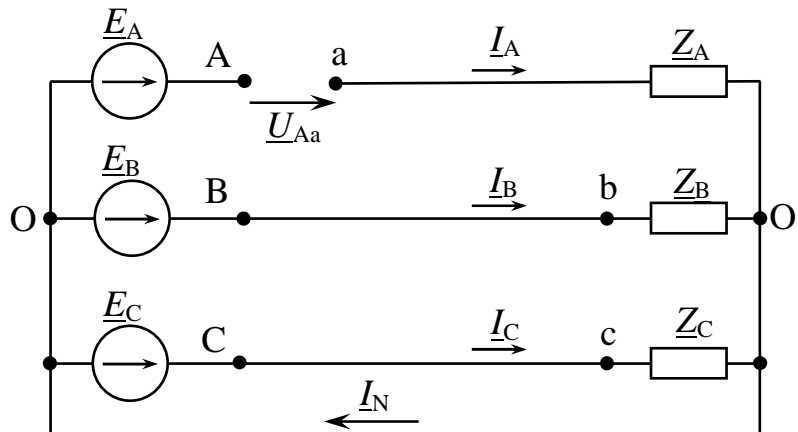


Рисунок 4.14

У випадку обриву лінійного проводу в схемі без нейтрального проводу (у схемі рисунку 4.14 треба вимкнути нульовий провід) лінійна напруга $\underline{U}_{\text{BC}}$ прикладається до послідовного з'єднання двох опорів \underline{Z}_B і \underline{Z}_C ; і якщо $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C$ вона (напруга) рівномірно розподіляється між цими опорами. Струми:

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{\text{BC}}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_C}. \quad (4.24)$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює:

$$\underline{U}_{Aa} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B - \underline{E}_B + \underline{E}_A = \underline{U}_{AB} + \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B, \quad (4.25)$$

$$\text{Якщо } \underline{Z}_B = \underline{Z}_C, \text{ то } \underline{U}_{Aa} = 1,5 \cdot \underline{U}_{AO}. \quad (4.26)$$

$$\text{Напруга зміщення нейтралі: } \underline{U}_{O_1O} = \underline{U}_{BO} - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B. \quad (4.27)$$

У випадку короткого замикання у фазі (схема "зірка-зірка" без нульового проводу – рисунок 4.15) напруга зміщення нейтралі – $\underline{U}_{O_1O} = \underline{E}_A$.

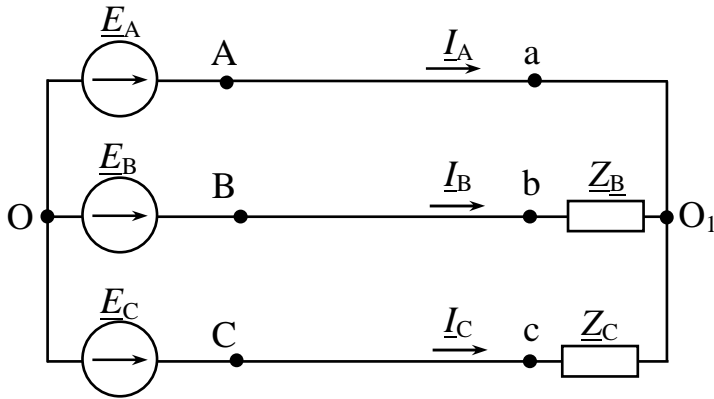


Рисунок 4.15

Напруги на навантаженнях:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{aO_1} &= 0, \underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{O_1O}, \\ \underline{U}_{cO_1} &= \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{O_1O}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Фазні струми:

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \frac{\underline{U}_{bO_1}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO_1}}{\underline{Z}_B}, \\ \underline{I}_A &= -(\underline{I}_B + \underline{I}_C). \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.4.2 Схема "зірка-трикутник"

При обриві одного з фазних проводів, наприклад, у фазі "вс" (рис. 4.16), фазний струм $\underline{I}_{вс} = 0$, струми \underline{I}_{ca} та $\underline{I}_{ав}$ залишаються без змін. Тому лінійний струм $\underline{I}_A = \underline{I}_{ав} - \underline{I}_{ca}$ зберігає своє значення, а лінійні струми \underline{I}_B та \underline{I}_C змінюються: $\underline{I}_B = -\underline{I}_{ав}$; $\underline{I}_C = \underline{I}_{ca}$. Таким чином, зміна навантаження в одній з фаз зумовлює одночасну зміну двох лінійних струмів і не впливає на величину фазних напруг, струмів двох інших фаз і на величину третього лінійного струму.

При обриві одного з лінійних проводів (рис. 4.17), наприклад, у фазі "А", режим роботи схеми змінюється. Опір фази "вс" буде, як і раніше, знаходитися під нормальною лінійною напругою \underline{U}_{BC} , струм $\underline{I}_{вс}$ не зміниться. Опори фаз "ав" і "са" виявляться послідовно з'єднаними та увімкненими до напруги " $-\underline{U}_{BC}$ ".

Якщо $\underline{Z}_{ав} = \underline{Z}_{ca}$, то напруга " $-\underline{U}_{BC}$ " розподілиться між ними навпіл, а якщо $\underline{Z}_{ав} \neq \underline{Z}_{ca}$, то напруга " $-\underline{U}_{BC}$ " розподілиться прямо пропорційно величинам цих опорів, при цьому у фазах "ав" і "са" протікатиме один і той же струм:

$$\underline{I}_{ав} = \underline{I}_{ca} = \frac{-\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{ав} + \underline{Z}_{ca}}. \quad (4.30)$$

Лінійні струми визначають так:

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ca}; \underline{I}_A = 0. \quad (4.34)$$

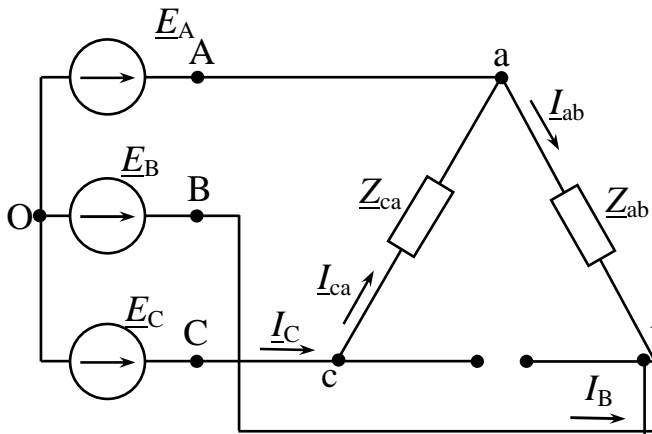


Рисунок 4.16

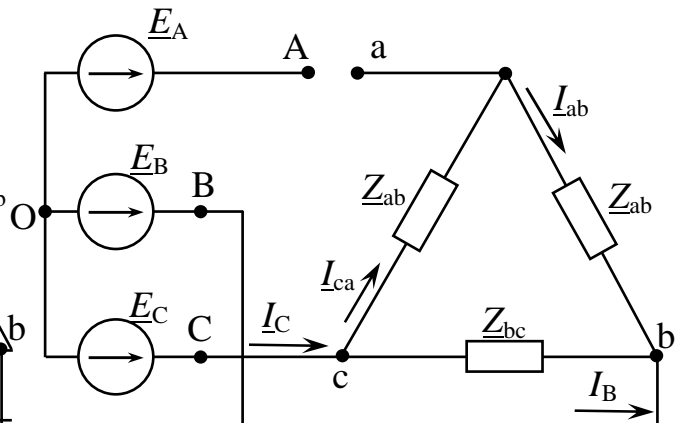


Рисунок 4.17

4.5 Потужність трифазного кола

Комплексна потужність трифазного кола:

$$\tilde{S}_3 = \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^* = P_3 + j \cdot Q_3, \quad (4.35)$$

$$\text{де } P_3 = U_A \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C - \quad (4.36)$$

активна потужність трифазного кола;

$$Q_3 = U_A \cdot I_A \cdot \sin \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \sin \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \sin \varphi_C - \quad (4.37)$$

реактивна потужність трифазного кола.

Якщо навантаження симетричне, то можна користуватися такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\text{л}} \\ P_3 &= 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\text{л}} \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\text{л}} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} - \text{фазна форма запису;} \quad (4.38)$$

де φ – кут зсуву між фазною ЕРС і лінійним струмом;

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \\ P_3 &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} - \text{лінійна форма запису.} \quad (4.39)$$

Вимірювання активної потужності в трифазних чотиривідних колах проводять за допомогою схеми трьох ватметрів – рисунок 4.18:

$$P_3 = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}. \quad (4.40)$$

Якщо схема чотиривідна, а навантаження симетричне, досить включити один ватметр і тоді $P_3 = 3 \cdot P_{W1}$.

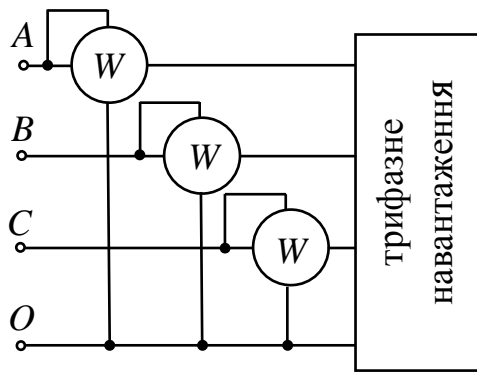


Рисунок 4.18

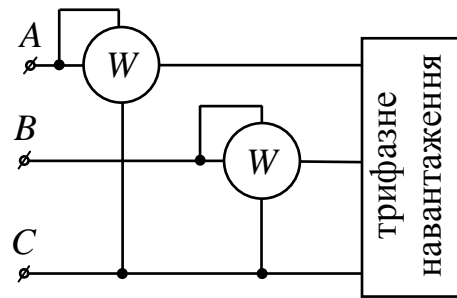


Рисунок 4.19

Доведемо, що включення двох ватметрів (рис. 4.19) дозволяє виміряти повну активну потужність трифазного кола:

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 &= \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{AC} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_B^* \right] = \operatorname{Re} \left[(\underline{U}_{AO} - \underline{U}_{CO}) \cdot \underline{I}_A^* + (\underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}) \cdot \underline{I}_B^* \right] = \\
 &= \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* - \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* - \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_B^* = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* + \\
 &+ \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CO} \left(-\underline{I}_A^* - \underline{I}_B^* \right) = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_C^*.
 \end{aligned}$$

Розділ 5 КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ

5.1 Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності

Якщо зміна струму в одному елементі кола призводить до появи ЕРС в іншому елементі кола, то говорять, що ці два елементи *індуктивно зв'язані*, а ЕРС, що виникає при цьому, називається ЕРС взаємної індукції (e_M). Кола, в яких крім ЕРС самоіндукції наводяться ЕРС взаємної індукції, називаються *індуктивно або магнітозв'язаними* колами.

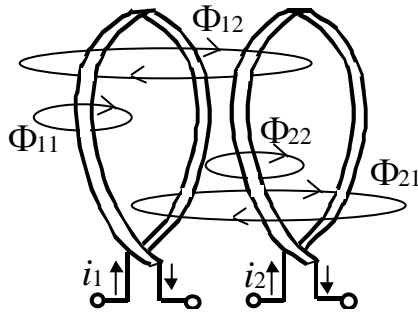


Рисунок 5.1

Примітка: явище самоіндукції – явище наведення в якомусь контурі ЕРС при зміні струму, що протікає по цьому ж контуру.

Нехай є дві котушки (рис. 5.1), умовно представлені у вигляді двох витків і віддалені одна від одної на деяку відстань. По котушках протікають синусоїдні струми i_1 і i_2 . Витки 1-ї котушки зчеплені з магнітним потоком самоіндукції Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad (5.1)$$

де Φ_{11} – частина магнітного потоку Φ_1 , який замикається, проходячи тільки через перший контур;

Φ_{12} – частина потоку Φ_1 , який замикається, проходячи через другий контур.

$$\text{Аналогічно для другого контуру: } \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (5.2)$$

Зрозуміло, що кожна котушка зчеплена з двома магнітними потоками: самоіндукції і взаємоіндукції.

Повне потокозчеплення 1-го і 2-го контурів:

$$\Psi_{1п} = w_1 \cdot (\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \Psi_1 \pm \Psi_{21}, \quad \Psi_{2п} = w_2 \cdot (\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}, \quad (5.3)$$

де w_1, w_2 – число витків 1 і 2 контурів;

Знак «+» у формулі (5.3) ставиться в тому випадку, коли потік самоіндукції (створюється струм ом власного контуру) і потік взаємної індукції направлені узгоджено.

При розрахунках таких електричних кіл вводять поняття *взаємної індуктивності* M (Гн), яка дозволяє при розрахунках врахувати явище взаємоіндукції і явище накопичення енергії в магнітному полі індуктивно зв'язаних котушок.

$$\text{Для нашого випадку: } M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}. \quad (5.4)$$

Взаємна індуктивність M залежить від взаємного розташування, геометричних розмірів котушок, числа витків і від μ (відносна магнітна проникність осердя);

вона може бути визначена за допомогою експерименту.

Коефіцієнт індуктивного зв'язку між двома контурами з індуктивностями L_1 і L_2 і взаємною індуктивністю M :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (5.5)$$

Зрозуміло, що $k \leq 1$. Коефіцієнт індуктивного зв'язку $k = 1$ (теоретично) якщо весь потік, що створюється 1-м контуром, буде зчеплений з другим контуром і залежить від взаємного розташування контурів (зміна індуктивного зв'язку досягається переміщенням однієї котушки відносно іншої).

Відмітимо, що M може бути більше L_1 (або L_2), але не може бути більше L_1 і L_2 одночасно.

5.2 Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок

При складанні рівнянь для індуктивно зв'язаних кіл необхідно знати узгоджено або зустрічно направлені потоки самоіндукції і взаємоіндукції (або ще говорять: *узгоджено* або *зустрічно* включені котушки), тобто знати напрям намотування витків котушок і напрям струму в них.

Котушки включені узгоджено, якщо струми в них однаково орієнтовані щодо однойменних затискачів, які на схемах позначаються «*» або «•». При узгодженому включенні котушок ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції додаються.

На прикладі рисунку 5.2 розглянемо методику складання рівнянь за законами Кірхгофа для розрахунку магнітозв'язаних кіл (включення котушок узгоджене):

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_1 \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1 dt + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt + i_2 \cdot R_2 = e_1, \\ i_3 \cdot R_3 + L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt - i_2 \cdot R_2 = e_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

де $L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt}$, – падіння напруги в 1 котушці; відповідно;

$L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}$ – падіння напруги в 2 котушці; відповідно.

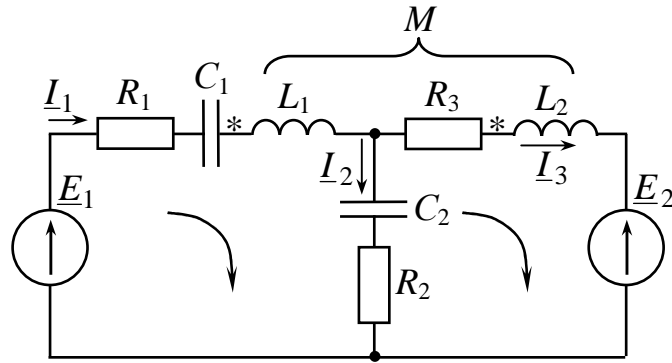


Рисунок 5.2

Перейдемо до системи рівнянь у комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 \cdot \left(R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_1} + j \cdot \omega L_1 \right) + \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 \cdot j\omega M = \underline{E}_1 \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_3 \cdot (R_3 + j \cdot \omega L_2) - \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) = \underline{E}_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Величина $X_M = \omega \cdot M$ – реактивний опір взаємної індуктивності, Ом.

Величина $\underline{Z} = j \cdot \omega \cdot M$ – комплексний опір взаємної індуктивності.

5.3 Визначення взаємної індуктивності

Розглянемо рисунок 5.3 – послідовне включення двох індуктивно зв'язаних котушок.

Нехай включення котушок – узгоджене. За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e, \quad (5.8)$$

$$\text{або: } \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M)] = \underline{E} \Rightarrow \quad (5.9)$$

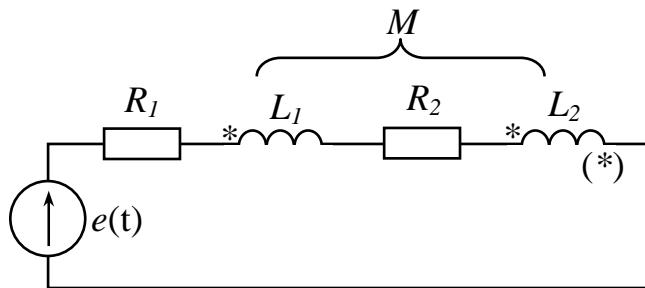


Рисунок 5.3

Таким чином, комплексний опір кола в цьому випадку

$$\underline{Z}_{\text{узг.}} = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot X_{\text{узг.}} \quad (5.10)$$

Нехай включення котушок – зустрічне (*). За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e, \quad (5.11)$$

$$\text{або: } \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M)] = \underline{E} . \quad (5.12)$$

Комплексний опір кола в цьому випадку:

$$\underline{Z}_{\text{зустр.}} = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot X_{\text{зустр.}} . \quad (5.13)$$

Отже $X_{\text{узг.}} - X_{\text{зустр.}} = 4 \cdot \omega \cdot M = 4 \cdot X_M$, звідки:

$$M = \frac{X_{\text{узг.}} - X_{\text{зустр.}}}{4 \cdot \omega} . \quad (5.14)$$

Вираз (14) використовується для визначення шляхом досліду взаємної індуктивності M .

Розглянемо векторні діаграми для узгодженого (рис. 5.4) і зустрічного (рис. 5.5) включення котушок для схеми рисунку 5.3.

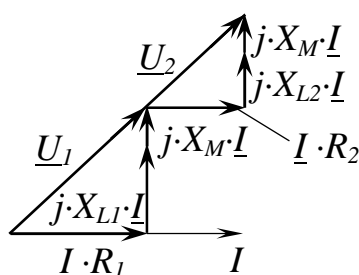


Рисунок 5.4

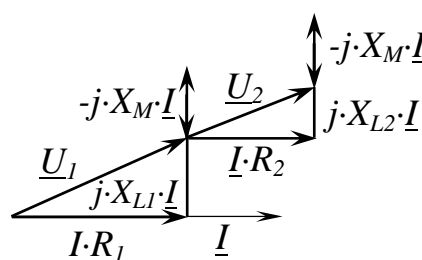


Рисунок 5.5

5.4 Паралельне з'єднання зустрічно включених котушок

Електричні кола з індуктивно зв'язаними котушками розраховуються тільки за законами Кірхгофа, але існує так звана «розв'язка» таких кіл, що дозволяє

використовувати усі методи розрахунку.

Для схеми рисунку 5.6. система рівнянь за законами Кірхгофа має вигляд:

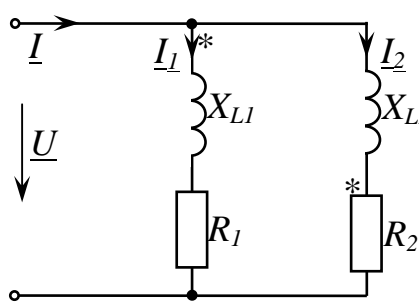


Рисунок 5.6

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j \cdot \underline{I}_1 \cdot X_{L1} - j \cdot \underline{I}_2 \cdot X_M \\ \underline{U} = \underline{I}_2 \cdot R_2 + j \cdot \underline{I}_2 \cdot X_{L2} - j \cdot \underline{I}_1 \cdot X_M \end{cases} . \quad (5.15)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (5.15)

знаходимо струми \underline{I} , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 .

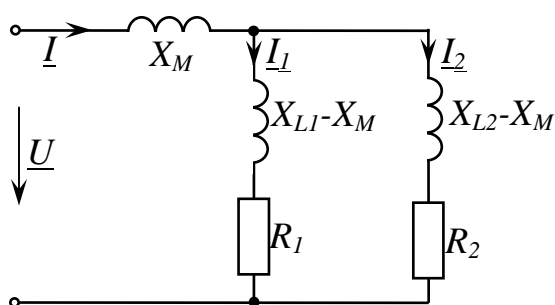


Рисунок 5.7

З урахуванням системи рівнянь (5.15) розв'язок електричного кола рисунку 5.6 має вигляд – рисунок 5.7.

ПІСЛЯМОВА

Отже Ви, шановний студенте, закінчили ознайомлення з нашим текстом лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки", частина I.

У ньому були розглянуті наступні теми:

- 1) лінійні електричні кола постійного струму;*
- 2) лінійні електричні кола синусоїдного струму;*
- 3) чотириполюсники;*
- 4) трифазні кола;*
- 5) кола із взаємною індуктивністю.*

При цьому автори намагалися забезпечити доступність викладення матеріалу і дружність тексту до читача. Звісно, текст лекцій не претендує на висвітленість у висвітленні основ сучасної теоретичної електротехніки. Але ми сподіваємося, він сповна відповідає поставленій меті – забезпечити набуття знань, що є необхідними для подальшого успішного вивчення другої та третьої частини дисципліни ТОЕ та усіх спеціальних електротехнічних дисциплін у вищому навчальному закладі, що в майбутньому допоможе при вирішенні конкретних технічних завдань у Вашій практичній діяльності за основною спеціальністю. Особливо корисним текст лекцій буде для студентів заочної форми навчання.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст]: учебник / – Л.А. Бессонов; М.: Гардарики, 2002. – 640 с.
2. Зевеке, Г.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов [Текст] / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, Нетушил, Страхов; М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
3. Паначевний, Б.І. Загальна електротехніка: теорія і практикум: Підручник [Текст] / Б.І. Паначевний, Ю.Ф. Сvergун; К.: Каравела, 2004. – 440 с.
4. Рибалко, М.П. Теоретичні основи електротехніки: Лінійні електричні кола: Підручник [Текст] / В.О. Есауленко, В.І. Костенко; Донецьк: Новий світ, 2003. – 513 с.
5. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса [Текст] / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин; Издательство «Питер», 2004 г. (Том 1 – 462 с., Том 2 – 575 с., том 3 – 376 с.).
6. Воробкевич, А.Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки. Частина 1. Навч. посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів [Текст] / В.С. Маляр, Р.Я. Совин, М.О. Соколовський, П.Г. Стахів, О.І. Шегедін, А.Ю. Воробкевича, О.І. Шегедіна; К.: «Магнолія Плюс», 2004. – 224 с.

Навчальне видання

ФОРКУН Яна Борисівна
ГЛІБОВА Марина Леонідівна
САБАЛАЄВА Наталія Олегівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з курсу

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ **(ЧАСТИНА І)**

*(для студентів усіх форм навчання напрямів
6.050701 – Електротехніка та електротехнології,
6.050702 – Електромеханіка)*

Відповідальний за випуск *А. Г. Сосков*

За авторською редакцією *Я. Б. Форкун*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2015, поз. 93 Л

Підп. до друку 18.06.2015

Формат 60x84/16

Друк на ризографі

Ум. друк. арк. 4,6

Тираж 50 пр.

Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014 р.